Vejgeometri

© Erik Vestergaard

© Erik Vestergaard, Haderslev 2007
Mindre fejl korrigeret juni 2020.

Indholdsfortegnelse

1. Indledning 5
2. Plane kurver 5
2.1 Parametriserede kurver 5
2.2 Parameterskift 7
2.3 Naturlig parameterfremstilling 8
2.4 Tangentdrejning og krumning 9
2.5 Krumningscirkel 13
3. Vejgeometri 16
3.1 Overgangskurver 16
3.2 Accelerationens komponenter 22
3.3 Kørselsdynamik 23
4. Andre anvendelser af klotoiden 25
4.1 Klotoider og rutsjebaner 25
4.2 *g*-påvirkninger 26
Appendiks A 30
Opgaver 32
Hjemmesider 45
Litteratur 45

1. Indledning

Ved projektering af en vej indgår der flere overvejelser end de fleste umiddelbart forestiller sig. Der er blandt andet emner som beliggenhed, trafikprognoser, kapacitet af vejstrækning, trafikrisiko, trafikøkonomi, beplantning, æstetik, støjbekæmpelse, uheldsbekæmpelse, jordarbejder, vejbefæstelser og vejgeometri. Disse emner bliver gennemgået for studerende i vejbygning på Danmarks Tekniske Universitet (DTU). Emnet *vejgeometri* indeholder underemner såsom tværprofil, sigtelinjer, friktion, linjeføring, længdeprofil, overgangskurver m.m. I emnet vejgeometri anvendes i høj grad matematik og fysik. Man beregner de kørselsdynamiske forhold ved kurvekørsel. Hvor der køres med store hastigheder, anlægges kurverne med sidehældning for at reducere tendens til udskridning eller væltning. Det vi imidlertid især skal se på i denne note er de *overgangskurver*, man benytter, når et lige stykke vej skal forbindes med en cirkelformet hovedkurve. Man kunne tro, at det var en god løsning at lade det lige stykke vej være tangent til cirklen. Imidlertid viser det sig ikke at være komfortabelt for chaufføren at køre på en sådan vej. Man kan argumentere logisk for, hvorfor det er mest hensigtsmæssigt at bruge en såkaldt *klotoide-bue* som overgangskurve. klotoiden, også kaldet *Cornu spiralen*, er en matematisk defineret kurve! For at kunne forstå hele problematikken er det nødvendigt, at vi indfører begrebet *krumning* for en plan kurve. Hvis du synes, at de teoretiske udledninger i afsnit 2 om plane kurver er for vanskelige kan du skimme dem og ellers springe til sætning 9 og bruge formel (15) for krumningen direkte.

2. Plane kurver

I dette afsnit skal vi betragte plane kurver og blandt andet definere begrebet *krumning* og *krumningscirkel*. Jeg vil gå ud fra, at du allerede kender til begrebet *vektorfunktion*.

2.1 Parametriserede kurver

En *parametriseret kurve* i planen kan skrives på formen $\vec{r}(t)=(x(t),y(t));\ t\in I$, hvor $x(t)$ og $y(t)$ er *koordinatfunktionerne*, defineret i et interval *I*. Når *parameteren t* gennemløber intervallet *I*, vil $\vec{r}(t)$ gennemløbe en *banekurve* (eller bare *kurve*) i planen. Vektorfunktionen siges at være *differentiabel* i *t*, hvis begge dens koordinater er differentiable i *t*, og i så fald skrives $\vec{r}'(t)=(x'(t),y'(t))$. Hvis koordinatfunktionerne begge er *n* gange kontinuert differentiable vil vi sige, at *vektorfunktionen* $\vec{r}(t)$ er af klasse C^n. Vi vil ofte forlange, at vektorfunktionerne er mindst 2 gange kontinuert differentiable, for at vi kan definere de nødvendige begreber, herunder krumning.

Definition 1
Med en *regulær* parametriseret kurve menes en parametriseret kurve af klasse mindst C^1, som opfylder at $\vec{r}'(t)\neq\vec{0}$ for alle $t\in I$, dvs. tangentvektorens koordinater er aldrig 0 på samme tid!

Ved anvendelser i fysik vil t ofte repræsentere *tiden*, og $\vec{r}(t)$ en partikels position til tiden t. Derfor kaldes tangentvektoren ofte for *hastighedsvektoren* eller bare *hastigheden*: $\vec{v}(t)=\vec{r}\,'(t)$. Differentierer man hastighedsvektoren får man *accelerationsvektoren* eller *accelerationen*: $\vec{a}(t)=\vec{v}\,'(t)=\vec{r}\,''(t)$. *Længden* $\left|\vec{v}(t)\right|$ af hastighedsvektoren er et tal, som vi vil kalde for *farten* til tidspunktet t og betegne med $v(t)$.

Eksempel 2

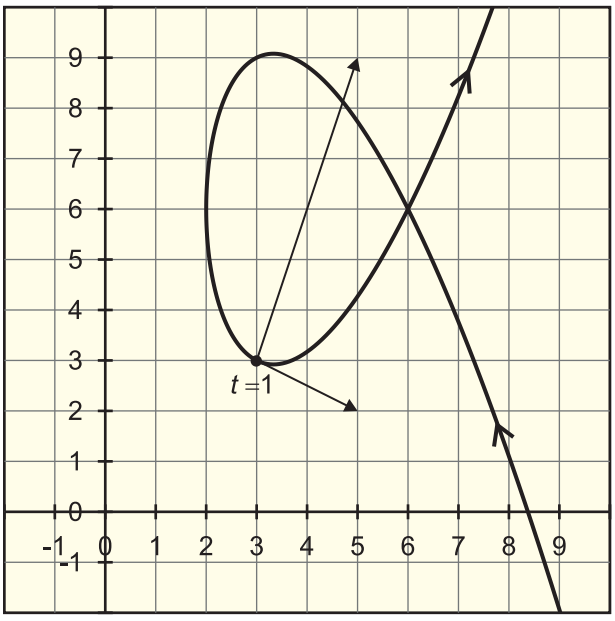
Nedenfor betragtes parameterfremstillingen for en plan kurve. Vi har også udregnet hastighedsvektoren, accelerationsvektoren og farten i punktet svarende til $t=1$.

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix} t^2+2 \\ t^3-4t+6 \end{pmatrix},\quad \vec{v}(t)=\begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-4 \end{pmatrix},\quad \vec{a}(t)=\begin{pmatrix} 2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

$$v(t)=\left|\vec{r}\,'(t)\right|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}=\sqrt{(2t)^2+(3t^2-4)^2}=\sqrt{9t^4-20t^2+16}$$

Vi kan opfatte $\vec{r}(t)$ som vektorfunktion for en partikel, der i pilens retning gennemløber kurven på figur 1. Hastighedsvektoren $v(t)$ er overalt forskellig fra 0-vektoren, da $x'(t)=2t$ kun er 0 når $t=0$, og da er $y'(t)=3t^2-4$ forskellig fra 0. Derfor er $\vec{r}(t)$ en regulær parametriseret kurve. Til tidspunktet $t=1$ befinder partiklen sig i punktet $\vec{r}(1)=(3,3)$. Til dette tidspunkt har vi hastighedsvektoren $\vec{v}(1)=(2,-1)$ og accelerationsvektoren $\vec{a}(1)=(2,6)$, som begge er indtegnet på figuren nedenfor. Ligesom man kan sige, at hastighedsvektoren angiver, hvor meget stedvektoren ændrer sig pr. sekund, så angiver accelerationsvektoren, hvor meget hastighedsvektoren ændrer sig pr. sekund. Derfor peger accelerationsvektoren ind i det område, som kurven krummer ind i!

Figur 1



2.2 Parameterskift

Det er vigtigt at forstå, at mens der til enhver parameterfremstilling svarer en banekurve, så er det omvendte ikke tilfældet: En kurve kan sagtens fremstilles ved flere parameterfremstillinger. Et parameterskifte kan foretages ved at sætte $t = \varphi(u)$, hvor φ afbilder et interval I_1 på intervallet I. Man interesserer sig særligt for de såkaldt *tilladte* parameterskift, der opfylder:

i) φ er af klasse C^n $(n \geq 1)$.
ii) $\varphi'(u) > 0$ for alle $u \in I_1$.

således, at den nye parameterfremstilling er på formen $\vec{r}_1 = \vec{r} \circ \varphi$:

(1) $$\vec{r}_1(u) = (\vec{r} \circ \varphi)(u) = \vec{r}(\varphi(u)) \; ; \; u \in I_1$$

Betingelsen i) betyder, at hvis $\vec{r}$ er af klasse C^n, så er $\vec{r}_1$ det også. Hvis vi igen opfatter parameteren som tiden, kan vi sige, at et parameterskift svarer til at gennemløbe kurven på en ny måde. Betingelsen ii) betyder, at φ er en voksende funktion, og det sikrer, at kurvepunkterne mødes i samme tidsmæssige orden, når man går over til at bruge u som tidsparameter. Hastigheden i kurven er derimod ændret, hvilket klart ses af reglen for differentiation af en sammensat funktion:

(2) $$\vec{r}_1'(u) \; = \; (\vec{r} \circ \varphi)'(u) \; = \; \vec{r}'(\varphi(u)) \cdot \varphi'(u)$$

Eksempel 3

Hvis man for eksempel benytter parameterskiftet $t = \varphi(u) = 2u, u \in \mathbb{R}$ på en vektorfunktion, som er defineret i $\mathbb{R}$, så svarer det til, at kurven gennemløbes med dobbelt hastighed. Ifølge (1) og (2) har vi nemlig:

$$\vec{r}_1(u) = \vec{r}(2u) \; ; \quad \vec{r}_1'(u) = 2 \cdot \vec{r}'(2u)$$

Eksempel 4

Lad os i forbindelse med vektorfunktionen i eksempel 2 se på et parameterskift, som *ikke* adlyder ii) ovenfor: $t = \varphi(u) = u^2; u \in \mathbb{R}$. For det første ser vi, at φ afbilder $\mathbb{R}$ på intervallet $[0, \infty[$, så hvis u nu kommer til at repræsentere tiden, så vil skiftet faktisk svare til at kun en del af kurven på figur 1 gennemløbes, nemlig den som svarer til mængden $\vec{r}([0, \infty[)$. Mere præcist, når u gennemløber $]-\infty, \infty[$, vil t bevæge sig fra ∞ til 0 og tilbage til ∞ igen, hvilket forklarer at partiklen ifølge figur 1 bevæger sig i modsat omløbsretning ned fra øverste højre hjørne ned til punktet $\vec{r}(0) = (2, 6)$ og tilbage igen. Vektorfunktionen for hastigheden vil ifølge (2) blive: $\vec{r}_1'(u) = 2u \cdot \vec{r}'(u^2)$. Her ses yderligere et problem: $\vec{r}_1'(0) = 0$, så $\vec{r}_1$ er *ikke* en regulær parametriseret kurve – Dette antyder det fornuftige i at kræve ii) opfyldt ved parameterskift!

2.3 Naturlig parameterfremstilling

I dette afsnit skal vi betragte et ganske bestemt parameterskift, som fører til den såkaldte *naturlige parameterfremstilling* for kurven. Givet en regulær parametriseret kurve, som kun bliver gennemløbet én gang. Længden af den del af kurven, som starter i punktet svarende til parameteren t_0 og ender i punktet svarende til parameteren *t*, er givet ved

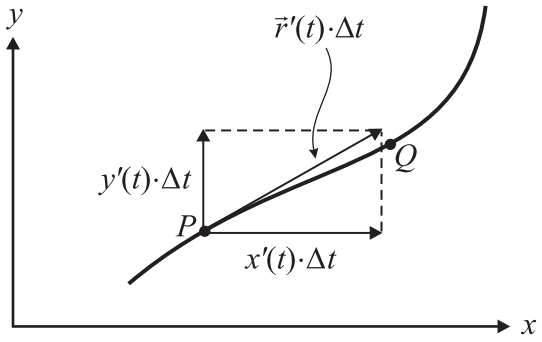
$$(3) \qquad s = s(t) = \int_{t_0}^{t} \left|\vec{r}\,'(u)\right| du = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2}\, du$$

Det er lidt omstændeligt at vise denne formel i fuldt omfang. Derfor skal vi kun se en skitsering af et bevis: Betragt figur 2 nedenfor. Vi ønsker et approksimativt udtryk for kurvelængden Δs mellem kurvepunkterne $\vec{r}(t)$ og $\vec{r}(t+\Delta t)$, som på figuren kaldes henholdsvis *P* og *Q*. Hvis Δt er lille, vil længden af linjestykket mellem *P* og *Q* være en god approksimation til Δs. Men $|PQ|$ er lig med længden af $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$.

(4)
$$\Delta s \approx |\Delta\vec{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{(x'(t)\Delta t)^2 + (y'(t)\Delta t)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\cdot\Delta t$$

hvor vi blandt andet har udnyttet, at differentialkvotienterne for koordinatfunktionerne omtrent er lig med differenskvotienterne, for eksempel $x'(t) \approx \Delta x/\Delta t$, hvilket betyder at $\Delta x \approx x'(t)\cdot\Delta t$. Ved integration fører (4) umiddelbart til (3).

Figur 2



Af den fundamentale sætning i integralregningen, som siger at integralet er en stamfunktion til integranden, fås:

$$(5) \qquad s'(t) = \left|\vec{r}\,'(t)\right| = v(t)$$

Denne identitet forklarer, hvorfor det var fornuftigt for os i afsnit 2.1 at kalde $\left|\vec{r}\,'(t)\right|$ for (øjebliks)farten til tidspunktet *t*. Hvis den betragtede parametriserede kurve $\vec{r}(t)$ er regulær, så er dens kurvelængdefunktion $s(t)$ en voksende funktion, eftersom (5) giver $s'(t) > 0$. Man ser endvidere, at hvis $\vec{r}$ er af klasse $C^n\,(n \geq 1)$, så er $s(t)$ også af klasse C^n. Dette gælder da også dens *omvendte funktion* $t = \varphi(s)$, og da $\varphi'(s) = 1/\left|\vec{r}(t)\right| > 0$, er φ et tilladt parameterskifte, ifølge afsnit 2.2. Vi skal nu studere, hvad der sker, når man benytter kurvelængden *s* som parameter. Den tilhørende parameterfremstilling for kurven kaldes den *naturlige parameterfremstilling* for kurven:

(6) $$\vec{r}_1(s) = \vec{r}(\varphi(s)), \quad s \in I_1$$

(7) $$\vec{r}_1'(s) = \vec{r}'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) = \vec{r}'(t) \cdot \frac{1}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$$

I (7) har vi anvendt (2). Den viser, at hastighedsvektoren for $\vec{r}_1$ overalt har længden 1. Kurven gennemløbes altså med den konstante fart 1! Det er ofte svært i praktiske opgaver at bestemme den naturlige parameterfremstilling, da det involverer, at man finder et udtryk for den inverse funktion til kurvelængdefunktionen.

2.4 Tangentdrejning og krumning

Givet en regulær parametriseret C^2-kurve $\vec{r}(t), t \in I$. Lad dens naturlige parameterfremstilling være $\vec{r}_1(s), s \in I_1$. Vi vil for ethvert punkt langs kurven definere to vektorer:

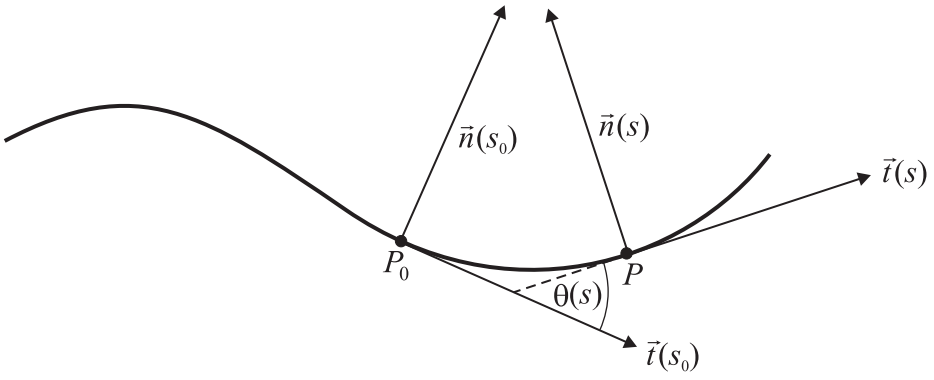
(8) $$\vec{t}(s) = \vec{r}_1'(s), \quad \vec{n}(s) = \hat{t}(s)$$

Vektoren $\vec{t}$ er altså *tangentvektoren*, mens den såkaldte *normalvektor* $\vec{n}$ fås som *tværvektoren* til tangentvektoren. Ifølge forrige afsnit har tangentvektoren længden 1, hvoraf det fremgår, at $\left(\vec{t}(s), \vec{n}(s)\right)$ i ethvert punkt af kurven udgør et *ortonormalsystem* – dvs. vektorerne har længde 1 og er indbyrdes ortogonale. Systemet kaldes derfor passende for det *ledsagende koordinatsystem* langs kurven. Betegnelserne $\vec{t}$ og $\vec{n}$ er almindelige i litteraturen. Førstnævnte bør ikke forveksles med parameteren t! I det følgende skal vi studere, hvordan tangentvektoren drejer, når man bevæger sig langs kurven.

Definition 5

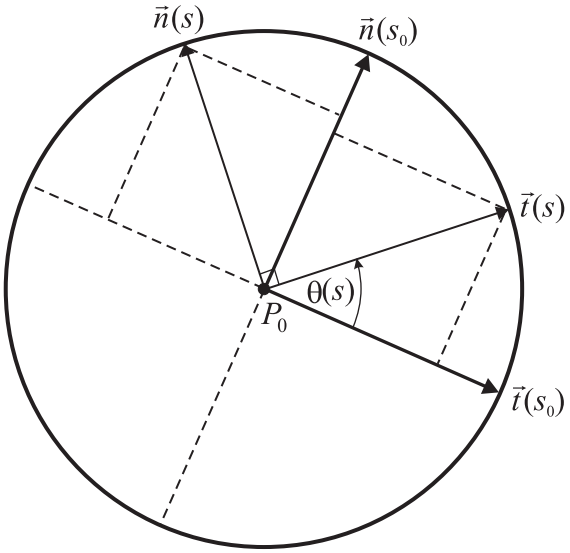
Givet et fast punkt P_0 på kurven svarende til parameteren s_0. Vi definerer da $\theta(s)$ som den vinkel, som tangentvektoren $\vec{t}(s)$ danner med den faste tangentvektor $\vec{t}(s_0)$ i P_0. Situationen er illustreret på figur 3.

Figur 3



Vi kan nemmere overskue situationen, hvis vi sammen med $\vec{t}(s_0)$ og $\vec{n}(s_0)$ tegner de repræsentanter for vektorerne $\vec{t}(s)$ og $\vec{n}(s)$, som har udgangspunkt i P_0:

Figur 4



Da alle vektorerne har længde 1, ligger endepunkterne for alle vektorpilene på enhedscirklen med centrum i P_0. Af overskuelighedshensyn bruger vi den kortfattede notation $\vec{t} = \vec{t}(s),\ \vec{n} = \vec{n}(s),\ \vec{t}_0 = \vec{t}(s_0),\ \vec{n}_0 = \vec{n}(s_0),\ \theta = \theta(s),\ \kappa = \kappa(s)$. Vektorerne $\vec{t}_0$ og $\vec{n}_0$ er altså *faste* vektorer, hvorimod vektorerne $\vec{t}$ og $\vec{n}$ er vektorfunktioner med parameteren *s*. Vinklen θ er en funktion af *s*. Det er naturligt at *opløse* de to variable vektorer $\vec{t}$ og $\vec{n}$ efter retningerne bestemt ved de to faste vektorer $\vec{t}_0$ og $\vec{n}_0$. Det ses af figuren, at

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \cos(\theta)\cdot\vec{t}_0 + \sin(\theta)\cdot\vec{n}_0 \\ \vec{n} &= -\sin(\theta)\cdot\vec{t}_0 + \cos(\theta)\cdot\vec{n}_0 \end{aligned} \tag{9}$$

Af den første ligning fås: $\cos(\theta) = \vec{t} \bullet \vec{t}_0, \sin(\theta) = \vec{t} \bullet \vec{n}_0$. Da $\vec{t}$ har længden 1 og er en kontinuert vektorfunktion i *s*, ses det umiddelbart, at $\theta = \theta(s)$ kan bestemmes som en kontinuert funktion af *s*. Eftersom $\vec{t} \bullet \vec{t}_0$ og $\vec{t} \bullet \vec{n}_0$ endda er kontinuert differentiable funktioner af *s*, er vinkelfunktionen også kontinuert differentiabel, da man lokalt har:

$$\begin{aligned} \theta &= \text{Arccos}(\vec{t} \bullet \vec{t}_0) + \text{konstant} \\ \theta &= \text{Arcsin}(\vec{t} \bullet \vec{n}_0) + \text{konstant} \end{aligned} \tag{10}$$

Husk på, at funktionerne Arccos og Arcsin er kontinuert differentiable i deres respektive definitionsmængder og bemærk, at konstanten er et multiplum af 2π.

Definition 6

Lad $\vec{r}_1(s), s \in I_1$ være den naturlige parameterfremstilling for en regulær parametriseret C^2-kurve. Da defineres krumningen $\kappa(s)$ i det til parameterværdien *s* svarende kurvepunkt ved $\kappa(s) = \theta'(s)$.

Bemærkning 7

Ovenstående definition af krumning er naturlig, idet den kan opfattes som den *øjeblikkelige vinkelhastighed*, *hvormed tangenten drejer*, når man vel at mærke bevæger sig ud af kurven med den konstante fart 1, svarende til at man benytter den naturlige parameterfremstilling. Valget af fast punkt P_0 er uvæsentlig, da $\theta(s)$ kun ændres med en konstant vinkel, hvis man vælger et andet fast punkt – hvilket betyder, at differentialkvotienten ikke ændrer sig! En andet spørgsmål, man kan stille sig er, om krumningen er en "geometrisk egenskab", altså om krumningen er knyttet til kurven og ikke afhænger af den valgte parameterfremstilling? Her er svaret, at den til dels afhænger af parameterfremstillingen, idet krumningen ved gennemløb af kurven i *modsat retning* skifter fortegn. Dette fremgår af definition 6, hvis parameteren s udskiftes med $-s$. Ved et *tilladt* parameterskifte (se afsnit 2.2) ændres krumningen derimod ikke, da krumningen jo netop er defineret ud fra den naturlige parameterfremstilling, og den er uændret ved et tilladt parameterskifte. Benyttes et ikke-tilladt parameterskifte, hvor $\varphi(u)$ ikke er monoton, så vil der være et sted, hvor $\varphi'(u)$ er 0, hvilket betyder, at den nye parametriserede kurve $\vec{r}\circ\varphi$ ikke er regulær, ifølge (2). Dvs. krumningen er da end ikke defineret!

Sætning 8

Lad $\vec{r}(t), t\in I$ være en regulær parametriseret C^2-kurve, og lad den tilhørende naturlige parameterfremstilling være $\vec{r}_1(s), s\in I_1$. Da vil den numeriske værdi af krumningen være lig med længden af den 2. afledede af vektorfunktionen, altså:

$$|\kappa(s)| = |\vec{r}_1''(s)| \tag{11}$$

Bevis: Vi vil nu differentiere med hensyn til s på begge sider af hver af ligningerne i (9). Vi får blandt andet brug for reglen for differentiation af en sammensat funktion:

$$\begin{aligned}\vec{t}' &= -\theta'\cdot\sin(\theta)\cdot\vec{t}_0 + \theta'\cdot\cos(\theta)\cdot\vec{n}_0\\ \vec{n} &= -\theta'\cdot\cos(\theta)\cdot\vec{t}_0 - \theta'\cdot\sin(\theta)\cdot\vec{n}_0\end{aligned} \tag{12}$$

Hvis vi sætter θ' uden for parentes, og bruges (9) fås:

$$\begin{aligned}\vec{t}' &= \theta'\cdot\left(-\sin(\theta)\cdot\vec{t}_0 + \cos(\theta)\cdot\vec{n}_0\right) = \theta'\cdot\vec{n} = \kappa\cdot\vec{n}\\ \vec{n}' &= -\theta'\cdot\left(\cos(\theta)\cdot\vec{t}_0 + \sin(\theta)\cdot\vec{n}_0\right) = -\theta'\cdot\vec{t} = -\kappa\cdot\vec{t}\end{aligned} \tag{13}$$

Identiteten $|\vec{t}'| = |\kappa\cdot\vec{n}| = |\kappa||\vec{n}| = |\kappa|$ fås umiddelbart ved at tage længden på begge sider af den første ligning i (13). Af definitionen i (8) fås (11) herefter middelbart! □

Sætning 9

Lad $\vec{r}(t), t \in I$ være en regulær parametriseret C^2-kurve, og lad den tilhørende naturlige parameterfremstilling være $\vec{r}_1(s), s \in I_1$. Da kan krumningen i det til parameteren s svarende punkt findes ved følgende determinant:

$$\kappa(s) = \det(\vec{r}_1'(s), \vec{r}_1''(s)) \tag{14}$$

Benytter man derimod den originale parameterfremstilling $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ kan man få krumningen ved følgende formel:

$$\kappa(t) = \frac{\det(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t))}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{\left((x')^2 + (y')^2\right)^{3/2}} \tag{15}$$

Bevis: I stedet for at tage længden på begge sider af den første ligning i (13), ligesom vi gjorde i beviset for sætning 8, kunne man tage skalarproduktet med $\vec{n}$ på begge sider af ligningen, hvilket giver $\vec{n} \bullet \vec{t}' = \vec{n} \bullet (\kappa \cdot \vec{n}) = \kappa \cdot \left|\vec{n}\right|^2 = \kappa$. Husk, at determinanten er defineret ved $\det(\vec{a}, \vec{b}) = \hat{a} \bullet \vec{b}$. Ifølge (8) betyder det, at $\kappa = \vec{n} \bullet \vec{t}' = \hat{t} \bullet \vec{t} = \det(\vec{t}, \vec{t}')$. Ifølge (8) fås herefter umiddelbart (14), hvor den variable s er anført eksplicit.

Ved praktiske beregninger er formlen (14) upraktisk, da den forudsætter, at vi har den naturlige parameterfremstilling. Vi ønsker en formel, som kan bruges på den oprindelige parameterfremstilling! Bruger vi reglen om differentiation af sammensat funktion på $\vec{r}_1 = \vec{r} \circ \varphi$ og siden produktreglen for differentiation, får vi:

$$\vec{r}_1'(s) = \vec{r}'(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \tag{16}$$

$$\vec{r}_1''(s) = \vec{r}''(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) \cdot \varphi'(s) + \vec{r}'(\varphi(s)) \cdot \varphi''(s) \tag{17}$$

Vi skal nu se på determinanten af højresiderne i henholdsvis (16) og (17). Vi bruger egenskaberne for determinanten (se øvelse 10). Bemærk, at $\varphi'(s)$ og $\varphi''(s)$ er skalarer!

$$\begin{aligned} \det(\vec{r}_1'(s), \vec{r}_1''(s)) &= (\varphi'(s))^3 \cdot \det\left(\vec{r}'(\varphi(s)), \vec{r}''(\varphi(s))\right) \\ &\quad + \varphi'(s) \cdot \varphi''(s) \cdot \det\left(\vec{r}'(\varphi(s)), \vec{r}'(\varphi(s))\right) \end{aligned} \tag{18}$$

Det sidste led i højresiden af (18) forsvinder, da determinanten til parallelle vektorer er 0. Hvis vi desuden indfører $t = \varphi(s)$ og $\varphi'(s) = 1 / \left|\vec{r}'(t)\right|$ fra afsnit 2.3, får vi:

$$\det(\vec{r}_1'(s), \vec{r}_1''(s)) = \frac{1}{\left|\vec{r}'(t)\right|^3} \det(\vec{r}'(t), \vec{r}''(t)) \tag{19}$$

Heraf udtrykket (15) for krumningen. □

Øvelse 10

Vis, at hvis a_1, a_2, a_3, a_4 er skalarer (tal), har determinanten nedenstående egenskab. Specielt er determinanten lineær i hver af argumenterne!

$$\begin{aligned}(20)\quad &\det(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2, a_3\vec{v}_3 + a_4\vec{v}_4)\\ &= a_1a_3\det(\vec{v}_1,\vec{v}_3) + a_1a_4\det(\vec{v}_1,\vec{v}_4) + a_2a_3\det(\vec{v}_2,\vec{v}_3) + a_2a_4\det(\vec{v}_2,\vec{v}_4)\end{aligned}$$

Bemærkning 11

Selv om emnet ikke skal behandles her, skal det lige nævnes, at krumningen af en rumlig kurve netop defineres ved $\left|\vec{r}_1''(s)\right|$. Krumningen af en rumlig kurve er derfor altid større end eller lig med 0. I planen kan vi med definition 6 derimod udmærket have en negativ krumning!

2.5 Krumningscirkel

I dette afsnit skal vi se, at man, hvis vektorfunktionen er tilstrækkelig pæn i en omegn af et punkt *P*, kan tilnærme banekurven i nærheden af dette punkt med en cirkel med en radius, som er omvendt proportional med den numeriske værdi af krumningen i *P*.

Definition 12

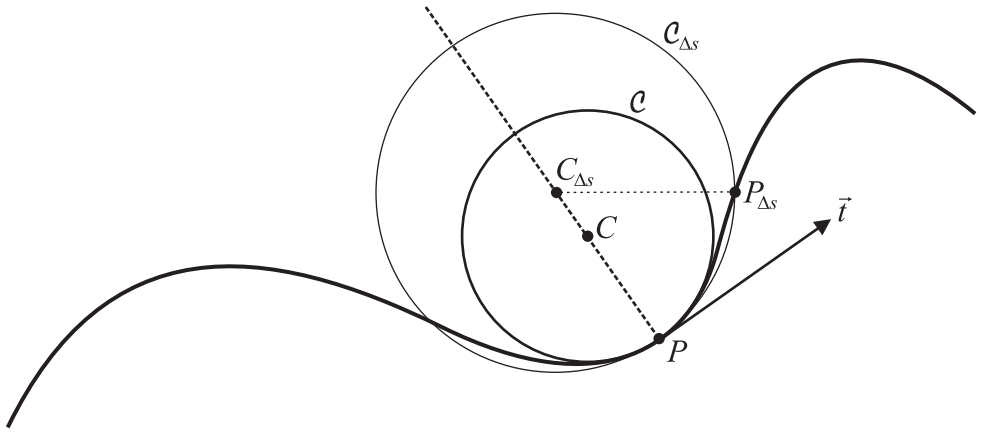
Lad $\vec{r}(t), t \in I$ være en regulær parametriseret C^2-kurve. For et vilkårligt $t \in I$ lader vi *P* være det til parameteren *t* svarende punkt, dvs. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}(t)$. Antag, at krumningen $\kappa(t) \neq 0$. Da defineres *krumningscirklen* i punktet *P* som den cirkel, der har radius lig med $R(t) = 1/\left|\kappa(t)\right|$ og som har centrum i punktet *C* bestemt ved:

$$(21)\qquad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{\kappa(t)}\cdot\vec{n}$$

hvor $\vec{n} = \hat{t}$ er normalvektoren i det ledsagende koordinatsystem i *P*. Denne enhedsvektor er ifølge (7) og (8) givet ved formlen $\vec{n}(t) = \widehat{r'(t)}/\left|\vec{r}'(t)\right|$. Størrelsen $\rho(t) = 1/\kappa(t)$ kaldes for *krumningsradius*, der eventuelt kan være negativ.

På figur 5 på næste side peger normalvektoren fra *P* ud af den kraftige stiplede linje. Det er den lille kraftigt optrukne cirkel $\mathcal{C}$, som er krumningscirklen. Den anden cirkel vil blive beskrevet i den næste sætning, som retfærdiggør begrebet krumningscirkel. Bemærk, at hvis man gennemløber kurven i modsat retning, så vil krumningen, jvf. bemærkning 7, godt nok skifte fortegn, men normalvektoren vil også blive vendt 180°. Det betyder, at krumningscentrum ifølge (21) vil være uændret

Figur 5



Sætning 13

Lad $\vec{r}(t), t \in I$ være en regulær parametriseret C^2-kurve, og lad $\vec{r}_1(s), s \in I_1$ være den tilhørende naturlige parameterfremstilling. For et vilkårligt $s \in I_1$ lader vi P betegne det til parameteren s svarende punkt, dvs. $\overrightarrow{OP} = \vec{r}_1(s)$. Antag, at krumningen i punktet er forskellig fra 0, dvs. $\kappa = \kappa(s) \neq 0$. Kurven har da ifølge definition 12 en krumningscirkel $\mathcal{C}$ i P, hvis centrum er givet ved (21). Lad $P_{\Delta s}$ være et variabelt punkt på kurven bestemt ved $\overrightarrow{OP_{\Delta s}} = \vec{r}_1(s+\Delta s)$. Der findes da et $\delta > 0$, således at *ingen* af punkterne $P_{\Delta s}$ for $0 < \Delta s < \delta$ ligger på tangenten gennem P. Sidstnævnte egenskab gør, at der for ethvert Δs med $0 < \Delta s < \delta$ eksisterer en cirkel $\mathcal{C}_{\Delta s}$, der går igennem punkterne P og $P_{\Delta s}$, og som i punktet P har den samme tangent som selve kurven! Da gælder det, at den variable cirkel $\mathcal{C}_{\Delta s}$ nærmer sig til krumningscirklen $\mathcal{C}$ når $\Delta s \to 0$. Centrum for den variable cirkel betegnes $C_{\Delta s}$ på figur 5.

Bevis: Beviset er udskudt til appendiks A, da det er temmelig teknisk. Den interesserede læser henvises hertil.

□

Eksempel 14

Lad os arbejde videre med eksempel 2 og bestemme krumningen og krumningscirklen i punktet svarende til parameterværdien $t = 1$. Fra eksempel 2 har vi først:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2+2 \\ t^3-4t+6 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2-4 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

hvoraf $\vec{r}(1)=(3,3)$, $\vec{r}'(1)=(2,-1)$, $\vec{r}''(1)=(2,6)$. Ifølge sætning 9 haves derfor:

$$(22)\qquad \kappa = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{((x')^2+(y')^2)^{3/2}} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{(\sqrt{5})^3} = \frac{14}{5\sqrt{5}} = 1{,}2522$$

Krumningsradius i kurvepunktet $P(3,3)$ er $1/\kappa = 5\sqrt{5}/14 = 0{,}7986$, som dermed også er radius i krumningscirklen. Det ledsagende koordinatsystem i P fås til:

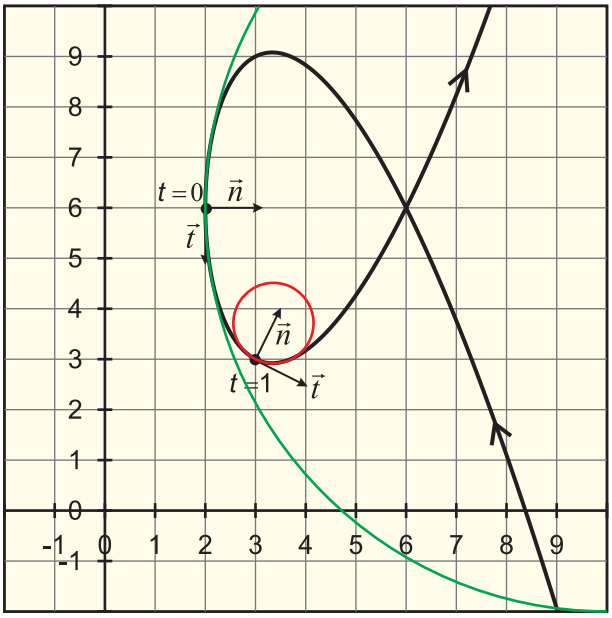
$$(23)\qquad \vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \vec{n} = \hat{t} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Centrum for krumningscirklen kan nu beregnes:

$$(24)\qquad \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PC} = \vec{r}(1)+(1/\kappa)\cdot\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5\sqrt{5}}{14}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\frac{5}{14} \\ 3\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Den lille røde cirkel på figuren nedenfor er krumningscirklen i punktet svarende til parameteren $t=1$. På figuren er også indtegnet krumningscirklen i punktet svarende til parameteren $t=0$. I dette punkt er krumningen meget mindre og radius i krumningscirklen derfor meget stor. Derfor kan kun en del af cirklen ses på figuren. De ledsagende koordinatsystemer bestående af vektorerne $\vec{t}$ og $\vec{n}$ er også indtegnet.

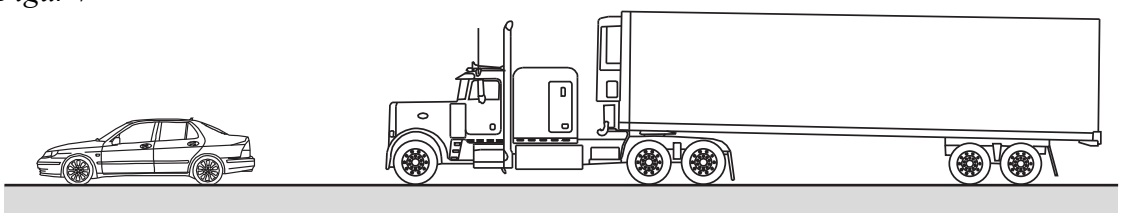
Figur 6



3. Vejgeometri

Som nævnt i indledningen, er der en lang række forhold at tage højde for ved projekteringen af en vej. Her er udvalgt to aspekter, vi skal studere: *Overgangskurver* og *kørselsdynamik*. De er begge underemner til emnet *linjeføring*, som handler om den kurveform, som vejens midterlinje har, når den projiceres ned i et vandret plan. Linjeføringens hovedelementer er den rette linje og cirkelbuen (hovedkurven). Herudover kræves de såkaldte *overgangskurver*, som vi skal betragte i det kommende afsnit. Kørselsdynamikken kommer ind i billedet, idet man med den kan beregne, hvor stor krumningen af vejen højst må være, for at køretøjet kan holde sig på vejen uden at skride ud eller vælte, under forskellige forhold. Kørselsdynamikken betjener sig ikke overraskende af nogle vigtige fysiske love, specielt inden for emnet *mekanik*. Vi vil se på lidt af dette i afsnit 3.3. Inden da skal vi imidlertid i afsnit 3.2 se på accelerationens komponenter i det ledsagende koordinatsystem. Linjeføringen er selvfølgelig først og fremmest styret af, hvilke områder og byer, som ønskes betjent af vejen samt af planlove, naturfredningslove etc. Ved udformningen af vejen tages også kraftigt hensyn til oversigtsforhold og, som det måske kommer bag på nogle, *æstetikken*. Det har vist sig, at trafiksikkerheden øges, hvis føreren af bilen får nogle afvekslende og æstetisk set tilfredsstillende synsoplevelser. Veje med lange lige strækninger har vist sig at virke ensformigt og sløvende på føreren. Ud over de projektopgaver du skal løse i afsnit 3.1, er der rig lejlighed til at prøve kræfter med opgaver i opgavesektionen. God fornøjelse!

Figur 7

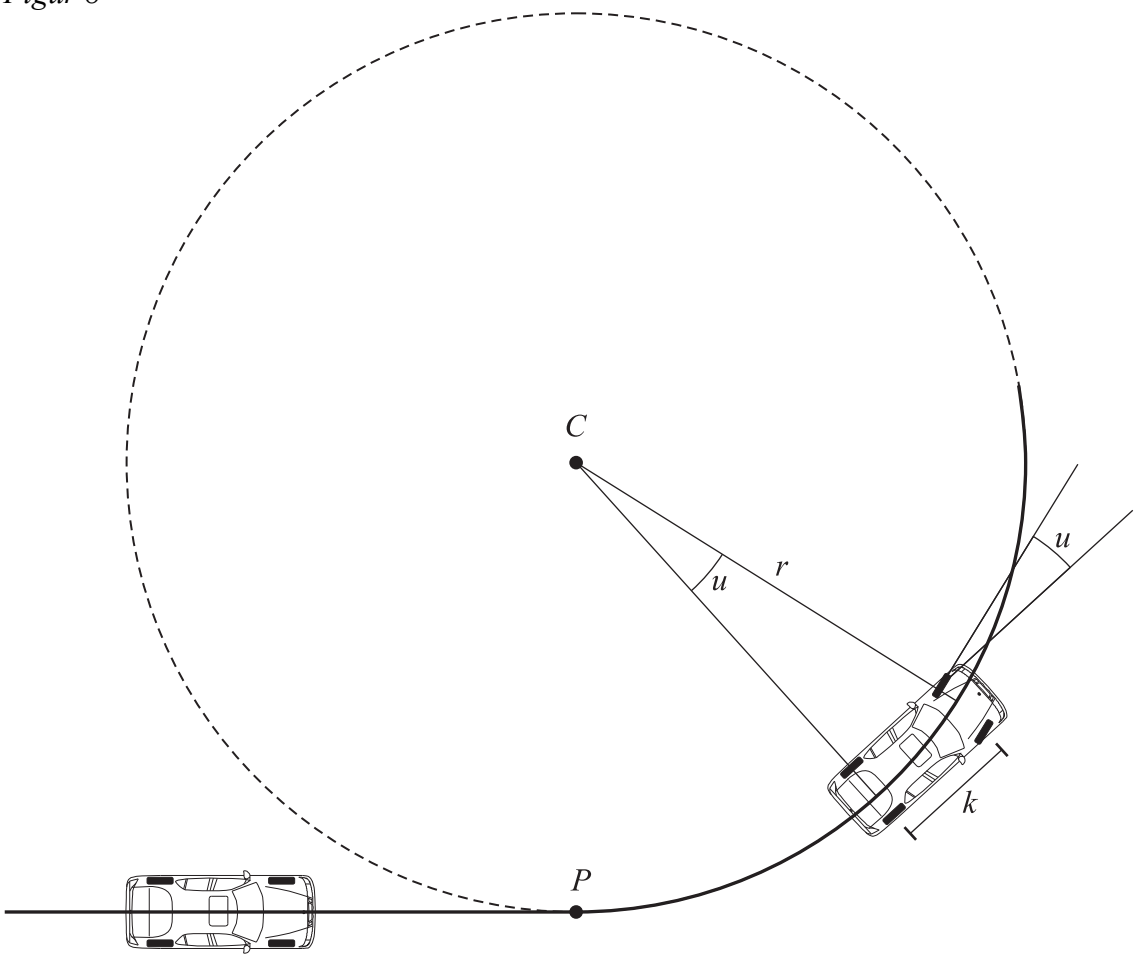


3.1 Overgangskurver

På figur 8 på næste side har vi illustreret det tankeeksperiment, at forbinde en cirkelkurve med dens tangent i et punkt P. Den sammensatte kurve er da fint differentiabel i punktet P. Der er imidlertid et problem: Krumningen er *diskontinuert* i P, eftersom en ret linje har krumning 0 og en cirkel med radius r har krumning $1/r$. Det har den konsekvens, at bilens fører vil være nødsaget til momentant at dreje rattet, så forhjulene fra at være parallelle med baghjulene, kommer til at danne en vinkel u i forhold til baghjulene, som det også er illustreret på figur 8. Dette er naturligvis under forudsætning af, at føreren ønsker at følge ideallinjen på vejen. Jo mindre radius i cirkelbuen er, jo større gene vil det være for personen at korrigere ved passagen af tangentpunktet P. Bemærk i øvrigt, at når først rattet er drejet, så forhjulene danner en bestemt vinkel med baghjulene, så skal man ikke korrigere på rattet, så længe cirkel-

kurven følges! Lad os kalde *akselafstanden* i bilen for k, og den vinkel, som for- og baghjul danner set fra cirklens centrum C, for u. Så viser et hurtigt argument, at så må vinklen mellem for og baghjul også være u. Og man opdager også, at hvis u regnes i radianer, så gælder med stor tilnærmelse at $r \cdot u = k \Leftrightarrow u = k/r$. I figuren har jeg af illustrationsmæssige årsager anvendt en urealistisk lille cirkel i forhold til bilens dimensioner. I praksis skal radius være noget større.

Figur 8

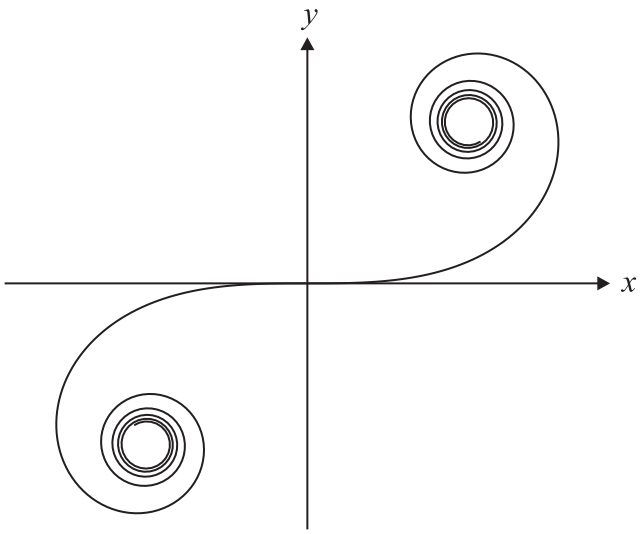


For at løse ovenstående problem med diskontinuiteten af krumningen har man fundet på at tilføje en såkaldt *overgangskurve* imellem det rette linjestykke og cirkelbuen. Som oftest vælges her en del af en såkaldt *klotoide* (på engelsk: *klothoid*, *clothoid* eller *cornu spiral*). Denne kurve har, som du senere selv skal vise, den egenskab, at dens krumning ændres lineært med den tilbagelagte længde, og i praksis betyder det, at man skal dreje rattet med en konstant vinkelhastighed, når man kører med konstant fart rundt i kurven. Kørslen i kurven bliver altså mere behagelig for chaufføren. En yderligere fordel ved klotoide-kurven er, at den giver bedre *æstetiske* oplevelser for chaufføren, hvilket jeg vil demonstrere senere i dette afsnit. Klotoidens parameterfremstilling kan angives ved følgende udtryk:

(25) $$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot \int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}z^2\right) dz \\ A \cdot \int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}z^2\right) dz \end{pmatrix}$$

hvor A er en konstant, den såkaldte *klotoide-parameter*. Koordinatfunktionerne er integraler, som er meget nært beslægtede med de såkaldte *Fresnel-integraler*, og de kan *ikke* udtrykkes ved de sædvanlige matematiske funktioner. Selve klotoide-kurven viser sig at være spiralen vist på figur 9. Det er som nævnt kun en lille del af denne, som benyttes som overgangskurve.

Figur 9



I det følgende skal du prøve at udlede en række egenskaber for klotoide-kurven, blandt andet ved hjælp af de redskaber, som er udledt i kapitel 2.

a) Forklar hvorfor alle klotoider er *ligedannede*, dvs. at en variation af klotoide-parameteren blot betyder en forstørrelse/formindskelse af kurven.
b) Bestem et udtryk for hastighedsvektoren, idet du benytter den fundamentale sætning i integralregningen, at integralet er en stamfunktion til integranden.
c) Vis, at farten i kurven er konstant lig med A og vis, at kurvelængden regnet fra punktet svarende til $t = 0$ til punktet svarende til t er givet ved $s(t) = A \cdot t$.
d) Bestem et udtryk for accelerationsvektoren.
e) Benyt formlen i sætning 9 til at påvise, at krumningen er givet ved følgende formel: $\kappa = t/A$, altså at krumningen er proportional med tiden t.
f) Bestem udtryk for vektorerne $\vec{t}$ og $\vec{n}$ i det ledsagende koordinatsystem.
g) Vis, at radius i krumningscirklen i punktet $\vec{r}(t)$ er givet ved $R(t) = A/t, t > 0$.
h) Vis, at centrum C for krumningscirklen kan angives ved følgende stedvektor:

$$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} A\cdot\int_0^t \cos\left(\frac{1}{2}z^2\right)dz \; - \; \frac{A}{t}\cdot\sin\left(\frac{1}{2}t^2\right) \\ A\cdot\int_0^t \sin\left(\frac{1}{2}z^2\right)dz \; + \; \frac{A}{t}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}t^2\right) \end{pmatrix}$$

i) Brug punkt c) og g) til at vise, at produktet mellem klotoide-delkurvens længde s og krumningsradius R i endepunktet er konstant: $s\cdot R = A^2$.

j) Brug punkt f) til at vise, at tangenten er drejet vinklen $\tau = \frac{1}{2}t^2$, regnet i radianer. Benyt derefter punkt c) og g) til at vise sammenhængen: $\tau = s/(2R)$.

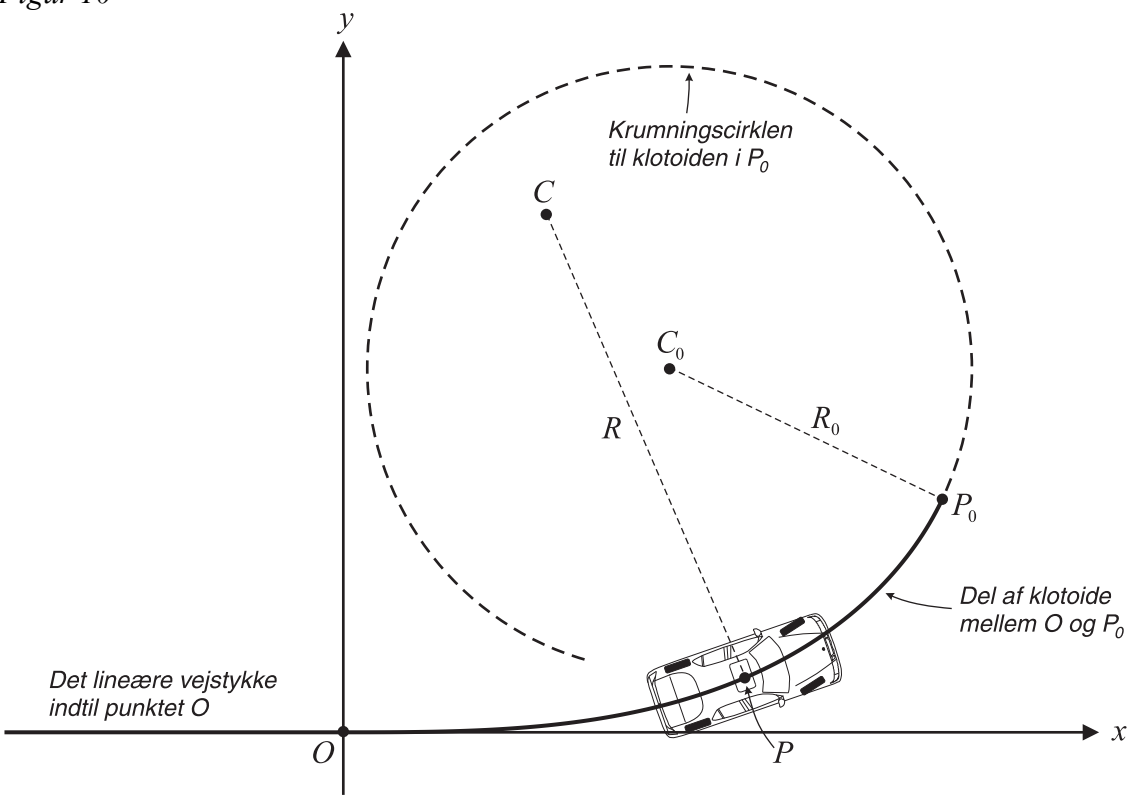
Bemærkning 15
Man kan vise, at $\vec{r}(t) \to \left(\frac{1}{2}A\sqrt{\pi}, \frac{1}{2}A\sqrt{\pi}\right)$ for $t \to \infty$, så banekurven på figur 9 spiralerer altså ind mod dette punkt.

For at løse problemet med diskontinuiteten af krumningen i sammenføjningspunktet indskyder man altså, som tidligere nævnt, et stykke af en klotoide imellem det rette linjestykke og cirkelbuen. Man sørger for, at cirklen bliver *krumningscirkel* til overgangskurven i dets endepunkt. Herved bliver krumningen fin kontinuert igennem hele kurvens forløb. Situationen er illustreret på figur 10 på næste side, hvor det rette linjestykke ligger på den negative del af x-aksen indtil origo, hvorefter den går over i klotoide-buen, som igen går over i cirkelbuen i P_0. For at gøre illustrationen tydelig har jeg valgt på figuren at benytte en ret stor del af klotoiden som overgangskurve. Normalt benyttes en mindre del, da man ikke ønsker for stor krumning af kørselsdynamiske årsager. Men dette afhænger selvfølgelig af, om der er tale om motorvej, landevej eller veje i byområde. Lige en bemærkning: Man benytter selvfølgelig ikke hele cirklen som kørebane, kun en del heraf. Det kan så være, at kørebanen fortsætter over i en ny overgangskurve. På figur 10 er bilen nået til punktet P på kurven, og centrum for krumningscirklen i dette punkt betegnes C og krumningsradius med R.

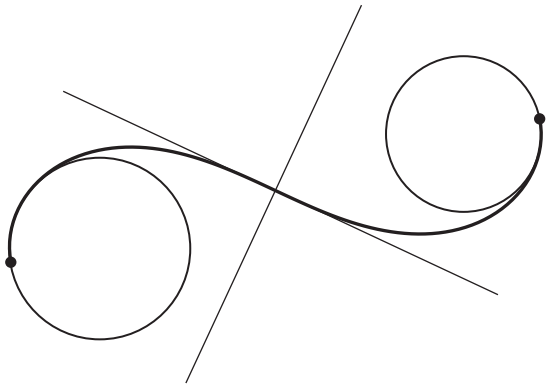
Kombiner c) og e) ovenfor til følgende udtryk for krumningen, udtrykt ved kurvelængden: $\kappa = s/A^2$. Af definitionen $d\theta/ds = \kappa$ fås derfor $\Delta\theta \approx \kappa\cdot\Delta s = (s/A^2)\cdot\Delta s$ for Δs lille. Hvis vi lader Δs være det stykke af kurven, som er imellem for og baghjul, så er dette stykke med meget stor tilnærmelse lig med akselafstanden a: $\Delta s \approx a$. Derfor vil vinklen $\Delta\theta$ mellem for- og baghjul med meget stor præcision være lig med $(a/A^2)\cdot s$. Hvis kurven tilbagelægges med den konstante fart v_0, kan vi sætte $s = v_0\cdot t_1$, hvor t_1 er tiden. Heraf fås $\Delta\theta \approx (a\cdot v_0)/A^2\cdot t_1$. Vinklen mellem for- og baghjul ændrer sig altså proportionalt med tiden. Med andre ord: Rattet skal drejes med konstant vinkelhastighed for at bilen følger kurven!

Man kan forbinde to modsat vendende cirkelbuer med en såkaldt *vende-klotoide*, som er to klotoide-stykker, der er hægtet sammen i begyndelsespunktet. Disse klotoider kan have forskellige eller samme klotoide-parameter (se figur 11).

Figur 10



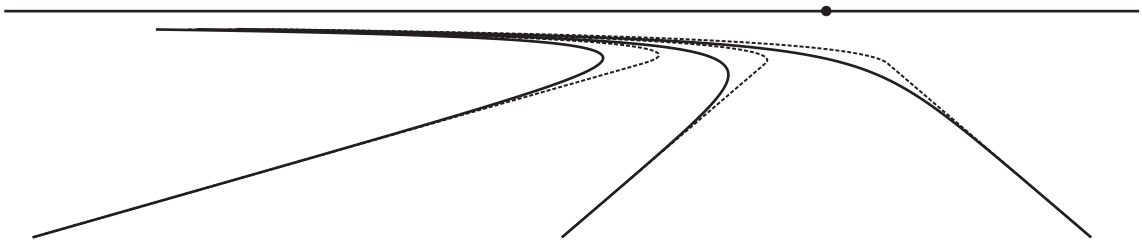
Figur 11



I praksis ønsker man sig en bestemt radius i cirklen. Derefter prøver man at finde en passende klotoide-parameter. Det er vigtigt at bemærke, at klotoide-kurvens fordele afhænger af, at køretøjet kører med *konstant fart*. Er dette ikke tilfældet, bliver den køreteknisk optimale kurve en anden. Ved frakørsler fra motorveje, hvor man må regne med at chaufføren bremser, benytter man således ofte en såkaldt *bremsekurve*. Ikke mere om dette her.

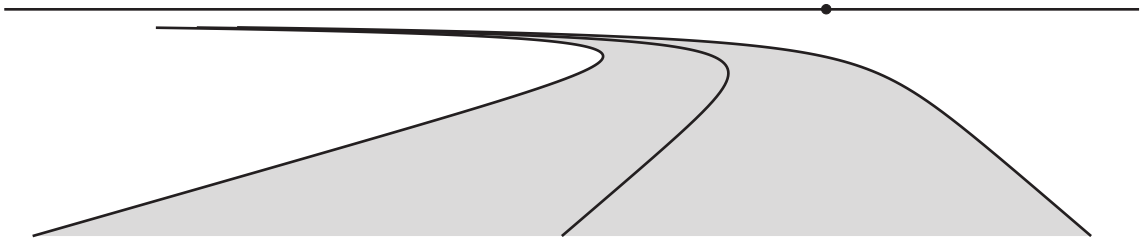
Som tidligere nævnt spiller *æstetikken* i forbindelse med klotoiden en ikke uvæsentlig rolle. For føreren af en køretøj vil et sving se mere naturligt ud, når der benyttes en klotoide som overgangskurve end tilfældet er, når en cirkel går direkte over i en tangent. Figur 12 viser hvordan det perspektivisk vil se ud, når en chauffør med øjnene i højden 1,50 meter over kørebanen kører ind i en hovedkurve (cirkelbue) med radius 300 meter forbundet via en overgangskurve, der er en klotoide. Den stiplede kurve svarer til, hvordan det vil se ud, hvis man kører direkte fra tangenten over i cirklen. Man ser, at brug af overgangskurve giver et harmonisk synsindtryk, hvorimod det i tilfældet med tangenten, som forløber direkte over i cirkelbuen ser ud til, at der er et lille knæk i kurveforløbet. På figur 13 har jeg tegnet kurverne hver for sig. Til sidst vil jeg nævne, at man undertiden også bruger andre kurver som overgangskurver, for eksempel grafer for tredjegradspolynomier. Du kan studere dette i opgave 312.

Figur 12

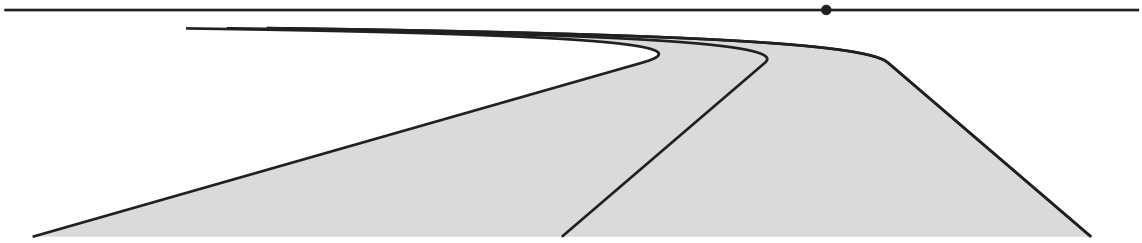


To i én

Figur 13



Med klotoide



Uden klotoide

3.2 Accelerationens komponenter

Til brug i de følgende afsnit 3.3 og 4.2 skal vi udlede en nyttig formel, som udtrykker accelerationsvektoren i det ledsagende koordinatsystem, dvs. accelerationens komponenter i tangentens og normalens retning. Ifølge (6) har vi $\vec{r}(t) = \vec{r}_1(s(t))$ og differentierer vi med hensyn til t og bruger (8), fås følgende udtryk for hastighedsvektoren:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \vec{r}_1\,'(s(t)) \cdot s'(t) = v(t) \cdot \vec{t}\,(s(t)) \tag{26}$$

hvilket ikke er overraskende, idet den blot udtrykker, at hastighedsvektoren er lig med tangentvektoren multipliceret med farten til tiden t. Differentierer vi tangentvektoren med hensyn til t, fås:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{t}\,(s(t))\right) = \vec{t}\,'(s(t)) \cdot s'(t) = \vec{t}\,'(s(t)) \cdot v(t) \tag{27}$$

Accelerationsvektoren fås ved at differentiere hastighedsvektoren med hensyn til t, og benytter man (26), fås:

$$\begin{aligned} \vec{a}(t) &= \vec{v}\,'(t) = v'(t) \cdot \vec{t}\,(s(t)) + v(t) \cdot \vec{t}\,'(s(t)) \cdot v(t) \\ &= v'(t) \cdot \vec{t}\,(s(t)) + \left(v(t)\right)^2 \cdot \kappa(s(t)) \cdot \vec{n}(s(t)) \end{aligned} \tag{28}$$

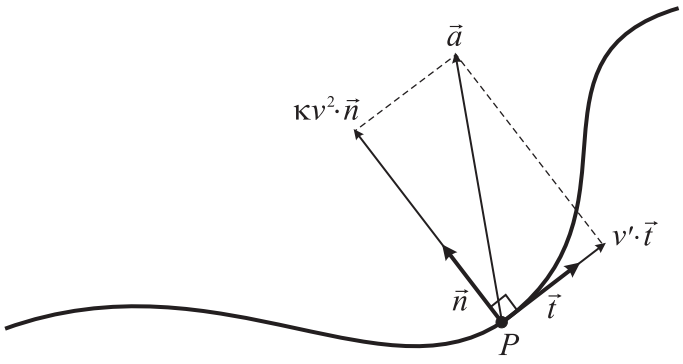
hvor vi har benyttet (13) ved omskrivningen af det sidste led. Skrevet i kompakt og underforstået form, ser (28) således ud:

$$\vec{a} = v' \cdot \vec{t} + \kappa v^2 \cdot \vec{n} \tag{29}$$

og udnytter vi, at krumningsradius ρ er omvendt proportional med krumningen, får vi:

$$\vec{a} = v' \cdot \vec{t} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} \tag{30}$$

Figur 14

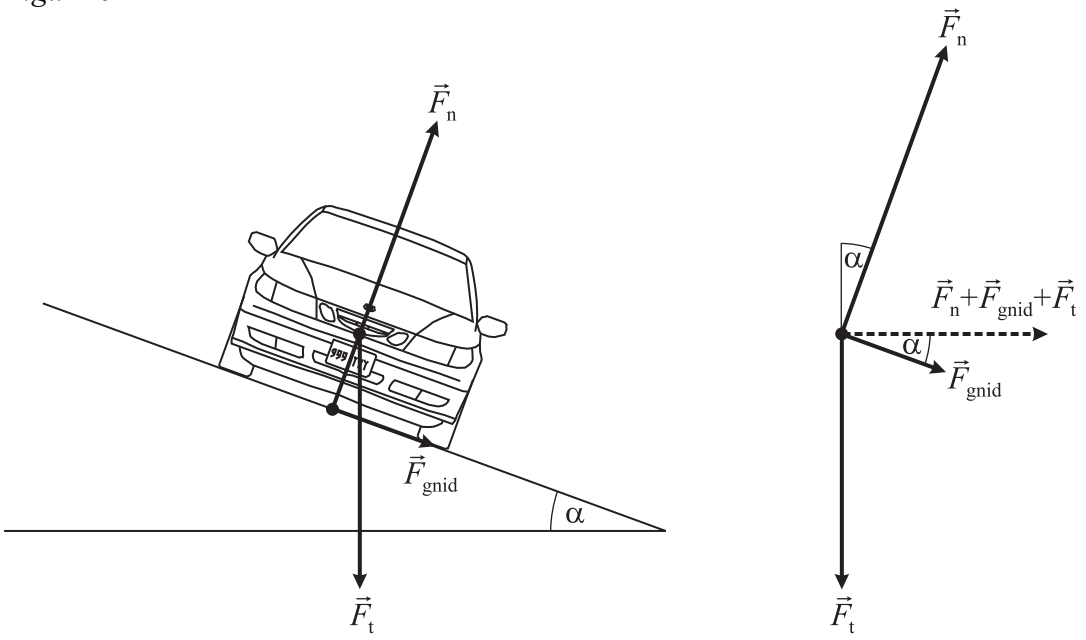


Vi vil tale om accelerationens *tangential-komponent* $\vec{a}_{\mathrm{t}} = v' \cdot \vec{t}$ og accelerationens *normal-komponent* $\vec{a}_{\mathrm{n}} = \kappa v^2 \cdot \vec{n} = (v^2/\rho) \cdot \vec{n}$. Disse er indtegnet på figur 14. Vi ser, at tangential-komponenten af accelerationen involverer farten differentieret. Hvis specielt farten er *konstant*, forsvinder tangential-komponenten altså!

3.3 Kørselsdynamik

Kører man hurtigt igennem en kurve, vil passagererne i en bil føle et vist ubehag. I værste fald kan bilen skride ud/vælte. Ikke overraskende er det især farten og vejens krumningsradius, som er afgørende. For at reducere risici anlægger man undertiden vejene med sidehældning. Givet bilens fart v, vejens sidehældning α og krumningscirklens radius $R = |\rho|$, hvor ρ er krumningsradius. Da skal vi opstille betingelser for *gnidningskoefficienten*, sådan at køretøjet kan køre gennem kurven uden at skride ud.

Figur 15



Vi forestiller os en bil køre gennem en kurvet vej med sidehældning. Figur 15 viser et tværsnit af vejen, hvor sidehældningen er tegnet noget overdrevet af pædagogiske årsager. Bilen er påvirket af *tyngdekraften* $\vec{F}_{\mathrm{t}}$, som virker lodret ned fra bilens massemidtpunkt, en *normalkraft* $\vec{F}_{\mathrm{n}}$, som er reaktionen fra vejen og virker vinkelret på denne, og endelig en *gnidningskraft* $\vec{F}_{\mathrm{gnid}}$. Sidstnævnte virker vinkelret på bilens bevægelsesretning, som på figuren er ud af papiret. Hvis bilen kører hurtigt, vil bilen have en tendens til at ryge ud af kurven, og i dette tilfælde vil gnidningen virke modsat, dvs. nedad vejens tværsnit. Hvis bilen derimod kører langsomt, vil tendensen til at ryge udad kurven være mere end opvejet af bilens tendens til at falde indad i kurven, hvilket betyder, at gnidningskraften peger den anden vej. Det er dog førstnævnte tilfælde, der er afbildet på figuren. Til højre på figur 15 har jeg indtegnet kræfterne, så de udgår fra det samme punkt. Sagen er, at vi på forhånd ved, at hvis bilen skal kunne køre i kurven med kon-

stant fart uden at skride ud, så må der ifølge forrige afsnit være en acceleration af størrelsen v^2/R ind mod krumningscirklens centrum, hvor v er farten. Ifølge Newtons 2. lov er vektorsummen af de virkende kræfter lig med masse gange acceleration, $m \cdot \vec{a}$, så vektorsummen er altså rettet ind mod krumningscirklens centrum. Den er tegnet med en stiplet pil til højre på figur 15. Af hensyn til overskueligheden vil jeg i det følgende lade F_n, F_{gnid}, F_t, a og g betegne længderne af vektorerne $\vec{F}_n, \vec{F}_{gnid}, \vec{F}_t, \vec{a}$ og $\vec{g}$, hvor sidstnævnte vektor er *tyngdeaccelerationen*. Hvis vi opløser (se opgave 243) alle de tre kræfter i vandrette og lodrette komponenter, kan vi altså sige, at størrelsen af summen af de vandrette komponenter skal være $m \cdot a$ og størrelsen af summen af de lodrette komponenter skal være 0. Matematisk giver det anledning til følgende ligningssystem:

(31)
$$\begin{aligned} &\text{Lodret:} \quad F_n \cdot \cos(\alpha) - F_{gnid} \cdot \sin(\alpha) - F_t = 0 \\ &\text{Vandret:} \quad F_n \cdot \sin(\alpha) + F_{gnid} \cdot \cos(\alpha) = m \cdot a \end{aligned}$$

og indsættes $F_t = m \cdot g$ fås et sæt af to ligninger med to ubekendte, hvor F_n og F_{gnid} er de ubekendte:

(32)
$$\begin{aligned} F_n \cdot \cos(\alpha) - F_{gnid} \cdot \sin(\alpha) &= m \cdot g \\ F_n \cdot \sin(\alpha) + F_{gnid} \cdot \cos(\alpha) &= m \cdot a \end{aligned}$$

Ligningssystemet kan løses ved substitution eller som vi gør her ved hjælp af *determinant-metoden*:

(33)
$$F_n = \frac{\begin{vmatrix} m \cdot g & -\sin(\alpha) \\ m \cdot a & \cos(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}} = m \cdot (g \cdot \cos(\alpha) + a \cdot \sin(\alpha))$$

$$F_{gnid} = \frac{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & m \cdot g \\ \sin(\alpha) & m \cdot g \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{vmatrix}} = m \cdot (-g \cdot \sin(\alpha) + a \cdot \cos(\alpha))$$

Betingelsen for, at der *ikke* sker nogen *udskridning* er, at $F_{gnid} < \mu_s \cdot F_n$, hvor μ_s er den *statiske gnidningskoefficient* for de to materialer, der har kontakt med hinanden. Indsættes $a = v^2/R$ i (33) fås altså følgende betingelse for at bilen ikke skrider ud:

(34)
$$\mu_s > \frac{F_{gnid}}{F_n} = \frac{a \cdot \cos(\alpha) - g \cdot \sin(\alpha)}{a \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \cos(\alpha)} = \frac{v^2/R \cdot \cos(\alpha) - g \cdot \sin(\alpha)}{v^2/R \cdot \sin(\alpha) + g \cdot \cos(\alpha)}$$

Lad os sætte $\gamma = F_{gnid}/F_n$. Denne størrelse afhænger altså af farten, radius i krumningscirklen og sidehældningen, som vi kan se af udtrykket i (34). En vej dimensioneres normalt til at man skal kunne køre på den med en bestemt maksimal fart. Derfor kan vi

sige, at v er givet på forhånd. Tilbage er der R og α at regulere på, så uligheden (34) overholdes og udskridning dermed undgås. Imidlertid er grænsen for komfortabel kørsel under normale forhold overskredet længe inden γ nærmer sig μ_s. Endvidere ønsker man at være på den sikre side, så køretøjerne kan køre sikkert under forskellige klimatiske forhold. Derfor fastsætter man i vejregelsættet den største værdi for γ, man tillader: γ_{max}. Denne værdi er afhængig af farten og er angivet i tabellen nedenfor. For yderligere detaljer henvises læseren til [6].

v (km/t)	60	70	80	90	100	110	120
γ_{max}	0,18	0,16	0,14	0,12	0,10	0,08	0,07

4. Andre anvendelser af klotoiden

Klotoiden eller cornu-spiralen dukker også op i andre sammenhænge. Franskmanden Marie Alfred Cornu (1841 – 1902) anvendte den til at beskrive diffraktionsfænomener inden for optikken. Klotoiden har, foruden i vejprojektering, fundet anvendelse ved anlæg af togspor, skihopbaner og meget eksotisk ved konstruktionen af rutsjebaner i forlystelsesparker. Klotoider har endda været foreslået som banekomponenter i forbindelse med minedrift. Jeg vil komme ind på rutsjebane-anvendelsen i det følgende.

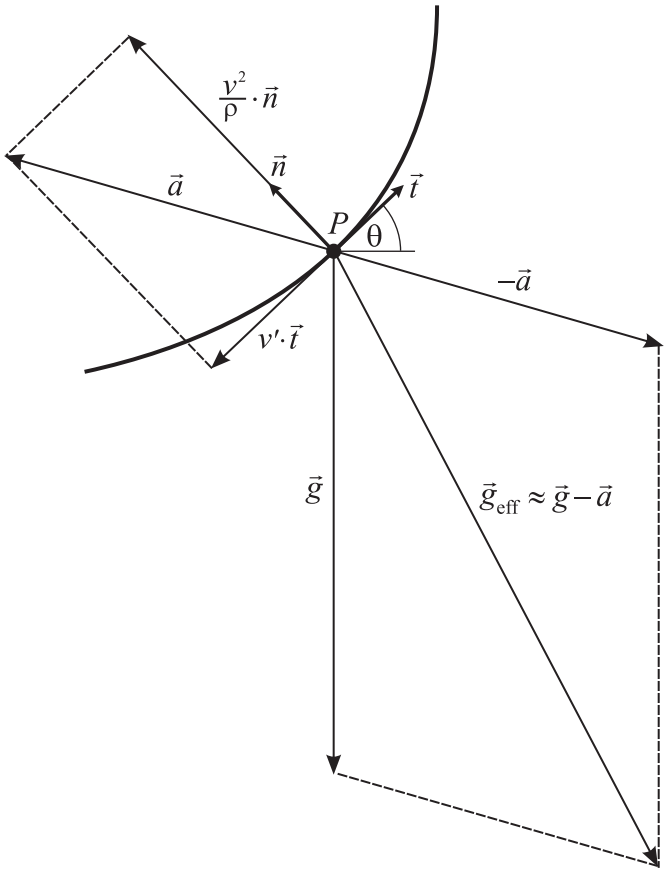
4.1 Klotoider og rutsjebaner

Som nævnt i indledningen til dette kapitel er en anden vigtig anvendelse af klotoider i forbindelse med udformningen af rutsjebaner i forlystelsesparker. Mennesket har som bekendt altid prøvet at udforske sine muligheder til det yderste, og inden for kunsten at kunne konstruere den rutsjebane, som kan give det største gys, lever dette princip i bedste velgående. I USA er der således i dag stor konkurrence blandt "Amusement Parks" om at eje den mest uhyggelige rutsjebane. Passagererne bliver slynget rundt i kurver og loops under stor *g*-påvirkning og oplever det ene øjeblik vægtløshed, det andet øjeblik presses de kraftigt tilbage i sædet. En af de store inden for forlystelsespark-industrien har været tyskeren Anton Schwarzkopf, som sammen med sin uundværlige chefingeniør Werner Stengel har været nyskabende i forlystelses-industrien. Det startede for alvor i 1960'erne og forløb helt frem til 1995, hvor Anton Schwarzkopf gik på pension. Werner Stengel er kendt som "Rutsjebanernes mester". Han konstruerede blandt andet verdens første succesfulde vertikal-loop. Man havde længe forinden forsøgt at konstruere brugbare cirkulære loops, men var stødt på det problem, at passagererne blev udsat for voldsomme *g*-påvirkninger, som undertiden medførte alvorlige personskader. Werner Stengel fandt en genial løsning på problemet, idet han forslog at anvende stykker af en klotoide i loopet. Dette skridt reducerede *g*-påvirkningerne betydeligt. Dette vil blive forklaret nærmere i det følgende.

4.2 *g*-påvirkninger

Når en person befinder sig i hvile, vil denne være påvirket af tyngdekraften $m\vec{g}$, som peger lodret nedad. Denne kraft er personen også påvirket af, når han/hun bevæger sig, for eksempel i en rutsjebane. Da virker imidlertid også andre kræfter, som gør, at personen føler det som om tyngdekraften har en anden størrelse eller retning end den i virkeligheden har. Vi taler om den såkaldte *effektive tyngdeacceleration* $\vec{g}_{\text{eff}}$, som kan defineres udfra et *relativt koordinatsystem*, der "følger med personen", og hvori personen er i hvile. Vi ser altså på situationen fra personens synspunkt!

Figur 16



Lad os se på det tilfælde, hvor en person med masse *m* bevæger sig i en kurveformet bane i et lodret plan. Sidstnævnte egenskab gør, at vi kan beskrive problemet plangeometrisk. Som relativt system er det hensigtsmæssigt at benytte det såkaldte ledsagende koordinatsystem $(P,\vec{t},\vec{n})$, beskrevet i afsnit 2.4. Det generelle udtryk for den effektive tyngdeacceleration er ret kompliceret, og de enkelte punkter på personen kan sagtens være udsat for forskellig effektiv tyngdeacceleration! Det vil føre for vidt at redegøre for det generelle udtryk her; vi vil kun omtale det i løse vendinger. For det første skal tyngdeaccelerationen korrigeres for accelerationen $\vec{a}$ af begyndelsespunktet *P*. For de punkter på personen, der ikke falder sammen med *P*, skal der yderligere tilføjes et "rotations-led", som skyldes det relative systems rotation i forhold til det faste. Endvidere indeholder det generelle udtryk for den effektive tyngdeacceleration også et led, som

tager hensyn til personens bevægelse i forhold til det relative system, det såkaldte *Coriolis led*. Men da personen antages at være i hvile i det relative system, er dette led eksakt 0. Et punkt, som ligger stille i punktet *P* vil altså være udsat for en g-påvirkning, som er eksakt lig med:

$$\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a} = \vec{g} - v' \cdot \vec{t} - \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n} \tag{35}$$

idet vi har benyttet udtrykket (30) for accelerationen af *P*. På figur 16 kan du se, hvordan personen føler den effektive tyngdeacceleration forløbe skråt ned mod højre. I praksis kunne dette demonstreres ved at personen holdt et pendul i hånden under turen. Det er netop de pludselige ændringer i den effektive tyngdeacceleration, som giver personen den gysende fornemmelse! Det skal dog også siges, at rutsjebaneoplevelsen forstærkes gennem de synsindtryk som øjnene modtager. Man kan således sagtens få et sug i maven ved at betragte en film med et rutsjebanegennemløb, selv om man forholder sig i ro!

Idet vi betegner den vinkel, som den første basisvektor $\vec{t}$ i det relative system danner med den første basisvektor i det faste system, med θ, giver (35) følgende koordinatfremstilling:

$$\begin{aligned} \vec{g}_{\text{eff}} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - v' \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} - \left(v^2/\rho\right) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -v' \cdot \cos(\theta) + \left(v^2/\rho\right) \cdot \sin(\theta) \\ -g - v' \cdot \sin(\theta) - \left(v^2/\rho\right) \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{36}$$

Hvis det betragtede punkt ikke ligger ret langt fra *P*, vil (35) og (36) stadig være en god approksimation til g-påvirkningen.

Sædvanligvis benytter man sig i rutsjebaner ikke af motorkraft til andet end at løfte vognen op til et højt niveau. Herfra må vognen alene klare turen ved hjælp af den mekaniske energi. Hvis man ser bort fra gnidning og luftmodstand, så vil den *mekaniske energi* $E_{\text{mek}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ være bevaret! I bunden vil farten være størst, mens den aftager på vej op i takt med, at den potentielle energi vokser. Den afledede af farten vil altså være negativ, når vognen er på vej opad! Det er årsagen til, at vi på figur 16 har tegnet $v' \cdot \vec{t}$ modsat rettet $\vec{t}$. Lad os regne på eksemplet med et cirkulært loop.

Eksempel 16 (Cirkulært loop)

Lad os se på et cirkulært loop med diameter 17,0 meter, og lad os antage, at vognens fart i bunden er 90 km/t = 25 m/s. Vi vil se bort fra gnidning og luftmodstand i det følgende således, at vi kan benytte bevarelsen af den mekaniske energi til at bestemme farten i toppen af loopet. Desuden vil vi bestemme g-påvirkningen via formel (36). Vi vil specielt bestemme *g*-påvirkningen i bunden af loopet i punktet *B* og i toppen i punktet *C*, hvor passagerne vender hovedet nedad! Energibevarelse giver:

$$\tfrac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C \;=\; \tfrac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \quad\Leftrightarrow\quad v_C = \sqrt{v_B^2 - 2gh_C}$$

idet vi sætter nulniveauet for potentiel energi til at være i punktet B. Det giver følgende værdi for farten i C:

$$v_C \;=\; \sqrt{v_B^2 - 2gh_C} \;=\; \sqrt{(25\text{ m/s})^2 - 2\cdot 9{,}82\text{ m/s}^2\cdot 17{,}0\text{ m}} \;=\; 17{,}1\text{ m/s}$$

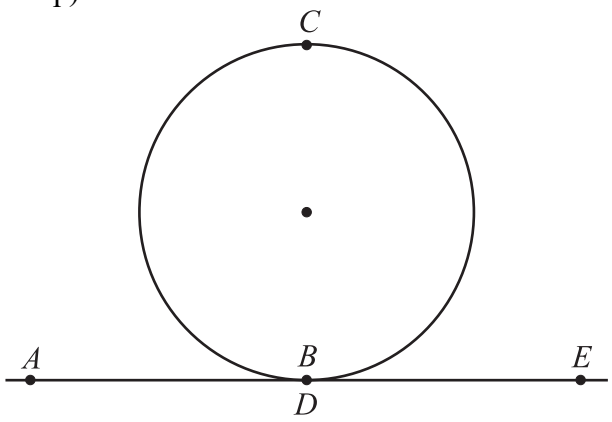
og følgende værdier for den effektive tyngdeacceleration ved indsættelse i (36):

$$\vec{g}_{\text{eff},\,B} \;\approx\; \begin{pmatrix} -0\cdot\cos(0°) + (25\text{ m/s})^2/(8{,}5\text{ m})\cdot\sin(0°) \\ -9{,}82\text{ m/s}^2 - 0\cdot\sin(0°) - (25\text{ m/s})^2/(8{,}5\text{ m})\cdot\cos(0°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -83{,}3\text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{g}_{\text{eff},\,C} \;\approx\; \begin{pmatrix} -0\cdot\cos(180°) + (17{,}06\text{ m/s})^2/(8{,}5\text{ m})\cdot\sin(180°) \\ -9{,}82\text{ m/s}^2 - 0\cdot\sin(180°) - (17{,}06\text{ m/s})^2/(8{,}5\text{ m})\cdot\cos(180°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24{,}4\text{ m/s}^2 \end{pmatrix}$$

Da den ene koordinat er 0, er det særligt nemt at bestemme længden af vektoren. Vi får følgende approksimative værdi for g-påvirkningen i punktet B: $83{,}3\text{ m/s}^2 = 8{,}5\,g$. I punktet C er den tilsvarende $24{,}4\text{ m/s}^2 = 2{,}5\,g$. Det overlades til læseren at overveje, hvorfor den afledede af farten i toppen og bunden af loopet er 0!

Figur 17 (Cirkulært loop)



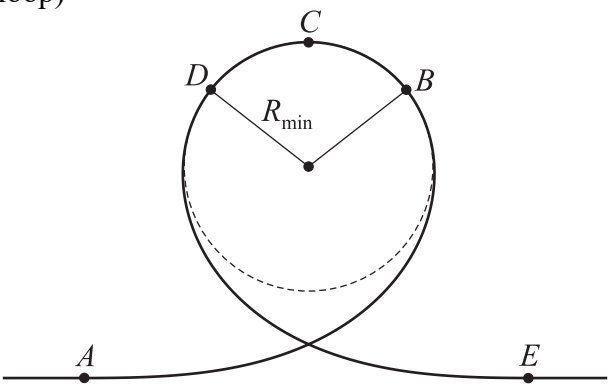
Eksemplet viser tydeligt problemet med et cirkulært loop. Betragt følgende vektorbidrag til udtrykket for den effektive tyngdeacceleration fra (36), regnet med fortegn:

(37) $$\vec{g} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad -\left(v^2/\rho\right)\cdot\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Sidstnævnte har en stor længde i bunden af loopet, da farten er stor her samtidigt med, at vektoren her er ensrettet med førstnævnte (tyngdeaccelerationen). I toppen derimod er bidragene modsat rettede og størrelsen af sidstnævnte vektor er ikke stor her. □

Werner Stengel indså, at hvis man øger krumningsradius i bunden, så vil man få mindsket længden af den sidste vektor i (37). Klotoiden har netop stor krumningsradius i bunden, og kurven har ydermere den fordel, at krumningen øges lineært med den tilbagelagte strækning i loopet. Situationen kan ses på figur 18: Et stykke oppe af loopet (i punkt B) lader man klotoiden gå over i dens krumningscirkel i B. Dette sikrer, at krumningen bliver kontinuert, dvs. kurven er kontinuert differentiabel af 2. orden! Werner Stengel var i stand til at reducere *g*-påvirkningen fra ca. 10 g til under 5 g.

Figur 18 (Klotoide loop)



Figur 19

Billedet er bragt med tilladelse fra Joel A. Rogers, www.coastergallery.com. Det viser et dobbelt-klotoide-loop fra rutsjebanen *Shockwave* i forlystelsesparken *Six Flags over Texas*, Arlington, Texas. Rutsjebanen er bygget af tyskeren Anton Schwarzkopf og taget i brug i 1978.

Appendiks A

I dette appendiks vil jeg give et bevis for sætning 13. Jeg vil gå ud fra, at du er bekendt med Taylors sætning. Hvis dette ikke er tilfældet må du konsultere noget litteratur!

Bevis for sætning 13: I det følgende vil jeg anbefale dig at kigge på figur 5. Lad os starte med at opskrive et udtryk for stedvektoren for det faste punkt P og stedvektoren for det variable punkt $P_{\Delta s}$. Sidstnævnte fås ved anvendelse af Taylors formel:

(A1) $$\overrightarrow{OP} = \vec{r}_1(s)$$

(A2) $$\overrightarrow{OP_{\Delta s}} = \vec{r}_1(s+\Delta s) = \vec{r}_1(s) + \frac{\Delta s}{1!}\vec{r}_1'(s) + \frac{(\Delta s)^2}{2!}\vec{r}_1''(s) + \vec{o}((\Delta s)^2)$$

Lad os straks genindføre tangentvektoren og normalvektoren fra afsnit 2.4. $\vec{t} = \vec{r}_1'(s)$, og ifølge (13) : $\vec{r}_1''(s) = \vec{t}' = \kappa \cdot \vec{n}$, så (A2) bliver til:

(A3) $$\overrightarrow{OP_{\Delta s}} = \vec{r}_1(s) + \Delta s \cdot \vec{t} + \tfrac{1}{2}\kappa \cdot (\Delta s)^2 \cdot \vec{n} + \vec{o}((\Delta s)^2)$$

og af (A1) og (A3):

(A4) $$\overrightarrow{PP_{\Delta s}} = \overrightarrow{OP_{\Delta s}} - \overrightarrow{OP} = \Delta s \cdot \vec{t} + \tfrac{1}{2}\kappa \cdot (\Delta s)^2 \cdot \vec{n} + \vec{o}((\Delta s)^2)$$

Hvis vi vælger Δs tilstrækkelig lille ($0 < \Delta s < \delta$), kan længden af restleddet holdes mindre end længden af det andet led på højre side, dvs. $\left|\vec{o}((\Delta s)^2)\right| < \frac{1}{2}\left|\kappa \cdot (\Delta s)^2\right|$, og da kan komponenten i normalvektorens retning ikke udlignes med det ukendte restled. Under de betingelser kan $\overrightarrow{PP_{\Delta s}}$ umuligt være parallel med tangentvektoren $\vec{t}$. Dermed er det bevist, at *ingen* af punkterne $P_{\Delta s}$ for $0 < \Delta s < \delta$ ligger på tangenten gennem P.

Da $P_{\Delta s}$ *ikke* ligger på tangenten til kurven i P, findes der en cirkel $\mathcal{C}_{\Delta s}$, som går igennem $P_{\Delta s}$ og P og som har samme tangent, som kurven har i punktet P. Lad $C_{\Delta s}$ betegne centrum for denne cirkel. Da cirklen $\mathcal{C}_{\Delta s}$ har samme tangent som kurven har i P, må centrum for $\mathcal{C}_{\Delta s}$ ligge et sted på normalen $\vec{n}$ i P. Der findes altså et tal $\rho_{\Delta s}$, så

(A5) $$\overrightarrow{PC_{\Delta s}} = \rho_{\Delta s} \cdot \vec{n}$$

og så $R = \left|\rho_{\Delta s}\right|$ er radius for cirklen $\mathcal{C}_{\Delta s}$. Ifølge (21) vil det være nok at vise, at der gælder $\rho_{\Delta s} \to 1/\kappa$ for $\Delta s \to 0$, for så vil cirklen $\mathcal{C}_{\Delta s}$ konvergere mod $\mathcal{C}$ for $\Delta s \to 0$. Vi har følgende:

(A6) $$\overrightarrow{OC_{\Delta s}} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PC_{\Delta s}} = \vec{r}_1(s) + \rho_{\Delta s} \cdot \vec{n}$$

(A7) $$\overrightarrow{C_{\Delta s}P_{\Delta s}} = \overrightarrow{OP_{\Delta s}} - \overrightarrow{OC_{\Delta s}} = \Delta s \cdot \vec{t} + \left[\tfrac{1}{2} \cdot \kappa \cdot (\Delta s)^2 - \rho_{\Delta s}\right]\vec{n} + \vec{o}((\Delta s)^2)$$

Hvis vi tager skalarproduktet med vektoren selv på begge sider af ligning (A6) fås:

$$\text{(A8)}\qquad \begin{aligned}\rho_{\Delta s}^2 \;&=\; (\Delta s)^2 \;+\; \left(\tfrac{1}{2}\cdot\kappa\cdot(\Delta s)^2-\rho_{\Delta s}\right)^2 \;+\; \left|\vec{o}((\Delta s)^2)\right|^2 \\ &\quad+\; 2\Delta s\cdot\left(t\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right) \;+\; 2\left[\tfrac{1}{2}\cdot\kappa\cdot(\Delta s)^2-\rho_{\Delta s}\right]\cdot\left(\vec{n}\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right)\end{aligned}$$

Hvis vi regner løs og isolerer $\rho_{\Delta s}$ på venstre side fås:

$$\text{(A9)}\qquad \begin{aligned}\left[\kappa\cdot(\Delta s)^2+2\left(\vec{n}\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right)\right]\rho_{\Delta s} \;&=\; (\Delta s)^2 \;+\; \tfrac{1}{4}\cdot\kappa^2\cdot(\Delta s)^4 \;+\; \left|\vec{o}((\Delta s)^2)\right|^2 \\ &\quad+\; 2\Delta s\cdot\left(t\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right) \;+\; \kappa\cdot(\Delta s)^2\left(\vec{n}\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right)\end{aligned}$$

og dermed:

$$\rho_{\Delta s} \;=\; \frac{(\Delta s)^2 \;+\; \tfrac{1}{4}\cdot\kappa^2\cdot(\Delta s)^4 \;+\; \left|\vec{o}((\Delta s)^2)\right|^2 \;+\; 2\Delta s\cdot\left(t\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right) \;+\; \kappa\cdot(\Delta s)^2\left(\vec{n}\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right)}{\kappa\cdot(\Delta s)^2+2\left(\vec{n}\bullet\vec{o}((\Delta s)^2)\right)}$$

og forkorter vi med $(\Delta s)^2$ i tæller og nævner, får vi:

$$\rho_{\Delta s} \;=\; \frac{1+\tfrac{1}{4}\kappa^2(\Delta s)^2+(\Delta s)^2\cdot\left(\dfrac{\left|\vec{o}((\Delta s)^2)\right|}{(\Delta s)^2}\right)^2+2\Delta s\cdot\left(t\bullet\dfrac{\vec{o}((\Delta s)^2)}{(\Delta s)^2}\right)+\kappa\cdot(\Delta s)^2\left(\vec{n}\bullet\dfrac{\vec{o}((\Delta s)^2)}{(\Delta s)^2}\right)}{\kappa+2\left(\vec{n}\bullet\dfrac{\vec{o}((\Delta s)^2)}{(\Delta s)^2}\right)}$$

Da $\dfrac{\left|\vec{o}((\Delta s)^2)\right|}{(\Delta s)^2} \;\to\; 0$ for $\Delta s\to 0$ ser vi nemt, at $\rho_{\Delta s} \;\to\; \dfrac{1}{\kappa}$ for $\Delta s\to 0$.

□

Opgaver

I denne sektion har jeg angivet nogle opgaver, som kan være med til at uddybe resultaterne fra kapitlerne 2, 3 og 4, samt give inspiration til ekstra udforskning. Nogle af opgaverne har vigtige anvendelser inden for faget fysik, og kan måske benyttes som projektopgaver! Opgaverne er nummereret, så de to første cifre angiver det afsnit, de hører til. For eksempel er opgave 245 den femte opgave i afsnit 2.4. Opgaver af lidt større sværhedsgrad er markeret med en *.

Opgave 211

Givet en kurve med parameterfremstilling

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ \frac{1}{3}t^3 - t + 2 \end{pmatrix}; \quad t \in \left]-2{,}5;\, 2{,}5\right[$$

a) Bestem hastighedsvektoren og accelerationsvektoren til ethvert tidspunkt.
b) Vis, at der er tale om en *regulær* parametriseret kurve.
c) Brug grafregneren til at skitsere banekurven.
d) Kurven har et såkaldt *dobbeltpunkt*, hvormed menes et punkt, som mødes to gange. Beregn koordinaterne til dette punkt og bestem de to tidspunkter, hvor det passeres. Bestem endvidere vinklen mellem tangentvektorerne i dobbeltpunktet.
e) Bestem punkter, hvori der er vandret, henholdsvis lodret tangent.

Opgave 212

Kurven givet ved følgende parameterfremstilling kaldes for en *hypotrochoide*:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t) + 3\cdot\cos(2t) \\ 2\cdot\sin(t) - 3\cdot\sin(2t) \end{pmatrix}; \quad t \in [0, 2\pi]$$

a) Bestem udtryk for hastighedsvektoren og accelerationsvektoren.
b) Bestem farten i punktet svarende til tidspunktet $t = 0$.
c) Tegn banekurven, eventuelt ved hjælp af grafregneren.

Opgave 213

Betragt for et fast $a>0$ følgende kurve, som kaldes "The Witch of Agnesi", opkaldt efter den kvindelige italienske matematiker *Maria Gaetana Agnesi* (1718 – 1799). Kurvens navn har en sjov historie, som vi dog ikke skal komme ind på her!

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot t\\a/(1+t^2)\end{pmatrix};\quad t\in\mathbb{R}$$

a) Tegn banekurven for værdien $a=1$ ved hjælp af grafregneren.
b) Bestem udtryk for hastighedsvektoren og accelerationsvektoren.
c) Vis, at kurvepunkterne tilfredsstiller følgende ligning: $y^2(x^2+a^2)=a^3$.

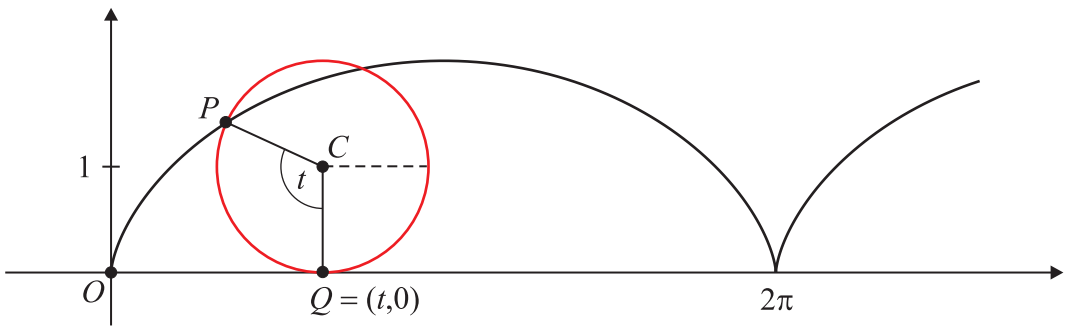
Opgave 214* (Cykloiden)

Den såkaldte *Cykloide* har parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t-\sin(t)\\1-\cos(t)\end{pmatrix};\quad t\in R$$

a) Bestem hastighedsvektoren og accelerationsvektoren til ethvert tidspunkt.
b) Tegn banekurven ved hjælp af grafregneren.
c) Påvis, at der *ikke* er tale om en regulær parametriseret kurve.
d) (lidt svær) Cykloiden kan frembringes på følgende måde: Antag, at cirklen står på x-aksen, så den rører x-aksen i 0. Vi markerer nu det punkt på cirklen, som rører x-aksen, og kalder punktet P. Når cirklen *ruller* hen ad x-aksen vil det faste punkt P på cirklen beskrive en cykloide med ovenstående parameterfremstilling. Det skal du prøve at vise! *Hjælp*: Cirklens røringspunkt med x-aksen betegnes til ethvert tidspunkt med bogstavet Q. Argumenter for, at når enhedscirklen er nået hen til et punkt, så Q har koordinaterne $(t,0)$, så må $\angle QCP=t$, regnet i radianer. Koordinaterne til punktet P kan findes ved at bruge indskydningsreglen: $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CP}$. For at bestemme vektoren $\overrightarrow{CP}$, bemærk da, at retningsvinklen kan angives som $-t-\frac{\pi}{2}$. Herefter kræves nogle overgangsformler for sinus og cosinus ...

Figur 20



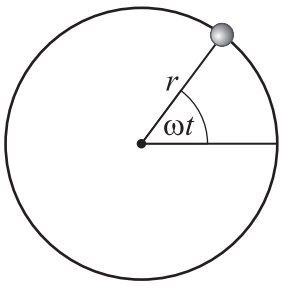
Opgave 215 (Jævn cirkelbevægelse)

En af de vigtige typer bevægelser inden for fysikken er den *jævne cirkelbevægelse*, hvor en partikel kører rundt i en cirkelbane med konstant fart. Man indfører typisk *vinkelhastigheden* ω, som angiver hvor stor en vinkel regnet i radianer, som overstryges pr. tidsenhed. Hvis radius i cirklen er *r*, har vi følgende parameterfremstilling for bevægelsen:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}; \quad t \in R$$

a) Bestem udtryk for hastighedsvektoren og accelerationsvektoren.
b) Vis, at hastighedsvektoren står vinkelret på stedvektoren og vis, at dens længde, som er *farten* og som betegnes med *v*, opfylder: $v = \omega \cdot r$.
c) Vis, at accelerationsvektoren peger ind mod centrum af cirklen og at dens længde, betegnet med *a*, opfylder formlerne $a = \omega^2 \cdot r = v^2 / r$.
d) Vis, at *omløbstiden* T kan bestemmes via formlen $T = 2\pi / \omega$.

Figur 21



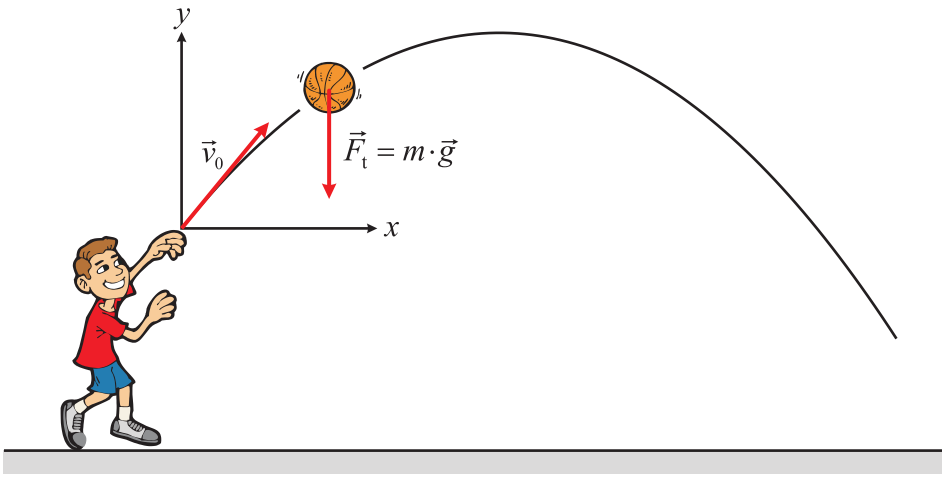
Ifølge *Newtons anden lov* er vektorsummen af de virkende kræfter lig med produktet af massen og accelerationen. Ifølge dette resultat, samt påstanden under punkt c) om at accelerationsvektoren peger ind mod cirklens centrum, har man altså, at partiklen for at kunne udføre sin jævne cirkelbevægelse må opfylde, at vektorsummen af de virkende kræfter skal pege ind mod cirklens centrum. Dette kan opfyldes på forskellig vis, for eksempel ved at partiklen er forbundet til centrum via en snor, således at snorkraften leverer den nødvendige kraft ind mod cirklens centrum. Hvis vi har at gøre med en bil, som udfører en cirkelbevægelse, kan den nødvendige kraft tilvejebringes ved hjælp af *friktionen* mellem køretøj og vejbane eller ved at kørebanen hælder lidt indad mod kurvens centrum. Alt dette kan du læse mere om under afsnittet kørselsdynamik.

e) Antag, at en bil med massen 975 kg skal køre rundt i en cirkel med en radius på 120 meter med en fart af 72 km/t. Hvor stor skal længden af vektorsummen af de virkende kræfter være, for at bevægelsen kan gennemføres?

Opgave 216 (Kasteparabel)

Kastes en bold skråt op i luften med en begyndelseshastighed, så vil genstanden følge en parabel-bane – vel at mærke når der kan ses bort fra luftmodstand. Det vil du komme frem til, når du har løst nedenstående opgaver. Når man skal løse et sådant bevægelsesproblem, skal man analysere hvilke kræfter, som virker på bolden under dens bevægelse og så bruge *Newtons anden lov*. Den eneste virkende kraft på bolden er tyngdekraften $\vec{F}_t$, da det er den eneste kraft, som virker på bolden. Kraften er indtegnet på figur 22. Mange tror, at der også skal en "vandret kraft-komponent" til at få bolden til at flytte sig til siden, men dette er altså ikke tilfældet. Det er nok, at bolden har en vandret hastigheds-komponent, når den slippes! Det er hensigtsmæssigt at lægge et koordinatsystem ind, som har begyndelsespunkt i det punkt, hvor bolden slippes (se figur 22). Accelerationsvektoren for bevægelsen ser til ethvert tidspunkt således ud: $\vec{a}(t) = (0, -g)$. Andenkoordinaten regnes negativ, da tyngdekraften vender nedad! Starthastigheden betegnes $\vec{v}_0 = (v_1, v_2)$.

Figur 22



a) Bestem et udtryk for hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$, idet du "regner baglæns" fra accelerationsvektoren. Afpas de arbitrære konstanter, så følgende *randbetingelse* passer: $\vec{v}(0) = \vec{v}_0 = (v_1, v_2)$.

b) Bestem et udtryk for stedvektoren $\vec{r}(t)$, idet du "regner baglæns" fra hastighedsvektoren. Afpas de arbitrære konstanter, så randbetingelsen $\vec{r}(0) = (0,0)$ holder.

c) Kaj kaster en bold op i luften med en starthastighed, hvis størrelse er 12 m/s og som danner en vinkel på 50° i forhold til vandret. Kaj slipper bolden i højden 1,70 meter over jorden. Beregn et udtryk for stedvektoren og brug den til at besvare følgende spørgsmål: Hvad er den maksimale højde, som bolden opnår over jordoverfladen? Til hvilket tidspunkt sker det? Hvor langt når bolden ud? Hvornår rammer bolden jorden?

d) (lidt sværere) Hvilken vinkel skal man kaste bolden op i for at man opnår den største kastelængde?

Opgave 221

$\vec{r}(t) = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t))$ er en parameterfremstilling for en cirkel med radius R.

a) Hvis t angiver tiden, hvor stor er så farten i kurven? Er den fast?
b) Foretag et passende parameterskifte, så farten i banekurven får den faste værdi 25 m/s. Radius er lig med 400 m.
c) Generaliser resultatet fra b) til en cirkel med radius R og hvor farten i kurven er v_0.
d) Overvej forskellige parameterfremstillinger, som svarer til at bilens fart øges i cirkelkurven, eller mindskes.

Opgave 222

Givet den parametriserede kurve $\vec{r}(t) = (\cos(\frac{1}{2}t^2), \sin(\frac{1}{2}t^2)); t \geq 0$.

a) Beskriv banekurven.
b) Vis, at farten er vokser proportionalt med tiden.
c) Er accelerationens størrelse konstant?
d) Er selve accelerationen konstant?

Opgave 231*

Kurven med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^3(t) \\ \sin^3(t) \end{pmatrix}; \quad t \in]0, \tfrac{\pi}{4}[$$

er en del af en såkaldt *Asteroide*. Du skal i denne opgave bestemme den naturlige parameterfremstilling for kurven, idet du undervejs gør brug af, at $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$, også kaldet "idiot-formlen".

a) Bestem et udtryk for hastighedsvektoren.
b) Vis, at farten ved omskrivning kan skrives på formen $3\sin(t)\cos(t)$.
c) Vis, at kurvelængde-funktionen med udgangspunkt i $t_0 = \frac{\pi}{4}$ kan skrives på følgende form: $s(t) = \frac{3}{2}\left(\sin^2(t) - \frac{1}{2}\right)$.
d) Brug c) til at vise, at den naturlige parameterfremstilling for kurven, med udgangspunkt i $t_0 = \frac{\pi}{4}$ kan skrives på formen

$$\vec{r}_1(s) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}s\right)^{3/2} \\ \left(\frac{2}{3}s + \frac{1}{2}\right)^{3/2} \end{pmatrix}; \quad s \in]-\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}[$$

Opgave 232*

En kurve har følgende parameterfremstilling: $\vec{r}(t) = (\frac{1}{2}t^2, t), t \geq 0$. Bestem den naturlige parameterfremstilling for kurven.

Opgave 241

En cirkel med radius *R* kan parametriseres ved $\vec{r}(t) = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t))$. Vis, at man i et hvert punkt af banekurven har følgende formel for krumningen: $\kappa = 1/R$.

Opgave 242

Brug formel (15) i sætning 9 til at vise, at i specialtilfældet med en *funktion* haves følgende udtryk for krumningen i grafpunktet svarende til *x*-koordinat *x*:

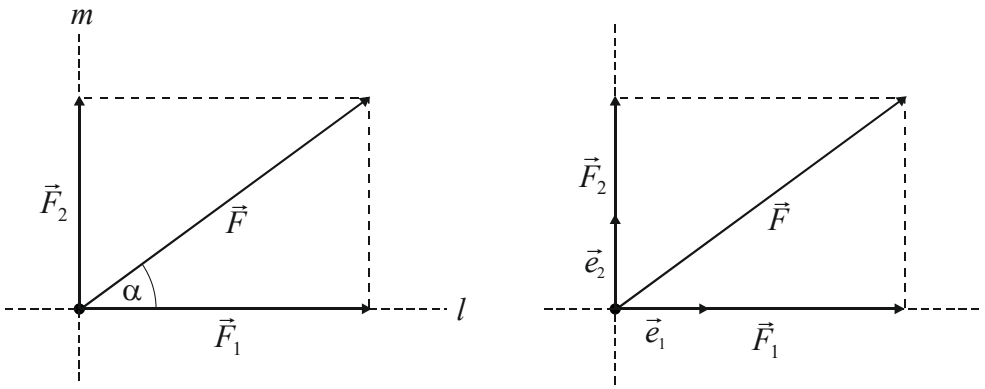
$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{\left(1 + (f'(x))^2\right)^{3/2}}$$

Opgave 243 (opløsning af vektorer)

a) Vi ønsker en vektor $\vec{F}$ skrevet som en sum af to vektorer $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$, som er parallelle med to opgivne indbyrdes ortogonale linjer *l* og *m*. Den mindste vinkel mellem $\vec{F}$ og *l* er opgivet til at være α. Idet vi vedtager, at når man fjerner vektorpilen til en vektor, så mener man *længden* af vektoren, skal du vise, at $F_1 = F \cdot \cos(\alpha)$ og $F_2 = F \cdot \sin(\alpha)$. Eftersom $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ siger vi, at vektoren $\vec{F}$ er *opløst* i $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$ efter retningerne bestemt af linjerne *l* og *m*.

b) Betragt den højre figur. Her ønskes vektoren $\vec{F}$ opløst efter retningerne bestemt ved to indbyrdes ortogonale enhedsvektorer $\vec{e}_1$ og $\vec{e}_2$. Vis, at *projektionerne* er givet ved: $\vec{F}_1 = (\vec{F} \bullet \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1$ og $\vec{F}_2 = (\vec{F} \bullet \vec{e}_2) \cdot \vec{e}_2$.

Figur 23



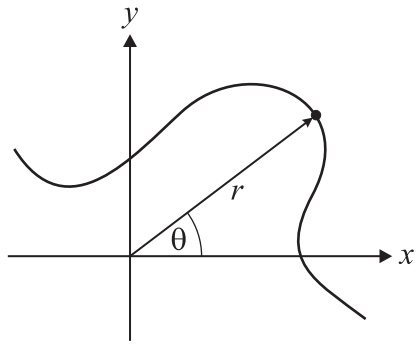
Opgave 244

Bestem krumningen i ethvert punkt af grafen for følgende funktioner, idet du benytter formlen fra opgave 242: a) $f(x)=\sin(x)$, b) $f(x)=\ln(x)$.

Opgave 245*

Undertiden beskriver man en kurve i *polære koordinater* (r,θ), hvilket betyder, at ethvert punkt er entydigt beskrevet ved hjælp af en vinkel θ og en afstand *r*.

Figur 24



a) Argumenter for, at almindelige *rektangulære koordinater* (*x*,*y*) fås ud fra polære koordinater via formlen $(x,y)=(r\cdot\cos(\theta),r\cdot\sin(\theta))$.

Kurven givet ved ligningen $r=a\cdot\theta$ i polære koordinater, hvor *a* er en positiv konstant, kaldes for *Archimedes spiral*.

b) Betragt Archimedes spiral for $a=1$. Vis, at kurven i rektangulære koordinater kan beskrives ved parameterfremstillingen $(x,y)=(\theta\cdot\cos(\theta),\theta\cdot\sin(\theta))$, hvor θ er parameteren. Hvis du bedre kan lide det, kan du bruge *t* i stedet for!

c) Beregn udtryk for $\vec{r}'(\theta)$ og $\vec{r}''(\theta)$ og brug det til at vise, at krumningen i det til parameteren θ hørende kurvepunkt er givet ved formlen:

$$\kappa(\theta)=\frac{2+\theta^2}{(1+\theta^2)^{3/2}}$$

d) Hvad sker der med krumningen, når $\theta\to\infty$?

e) Tegn banekurven for Archimedes spiral for $a=1$.

Opgave 246

En ellipse med den halve storakse *a* og den halve lilleakse *b* har følgende parameterfremstilling: $\vec{r}(t)=(a\cdot\cos(t),b\cdot\sin(t))$. Bestem et udtryk for krumningen i et kurvepunkt svarende til parameterværdien *t*.

Opgave 247

I matematikken defineres de to funktioner *cosinus hyperbolsk* og *sinus hyperbolsk* ved henholdsvis: $\cosh(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ og $\sinh(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

a) Brug definitionerne til at vise, at $\big(\cosh(x)\big)'=\sinh(x)$ og $\big(\sinh(x)\big)'=\cosh(x)$.

b) Betragt følgende parametriserede kurve:

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot\cosh(t)\\b\cdot\sinh(t)\end{pmatrix};\quad t\in R$$

Bestem et udtryk for krumningen af denne kurve i punktet svarende til parameterværdien t.

c) Angiv et udtryk for krumningsradius i punktet svarende til parameterværdien t.

d) Angiv et udtryk for centrum for krumningscirklen i punktet svarende til parameterværdien t.

e) Vis, at banekurven for ovenstående parametriserede kurve fremstiller den ene gren af hyperblen med ligning:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

Opgave 248*

Lad $\vec{r}(t)$ være en regulær parametriseret kurve. Vis, at vinklen mellem tangenterne til kurven i punkterne svarende til parametrene t_1 og t_2 er givet ved

$$\Delta\theta=\theta(t_2)-\theta(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}(\kappa\cdot v)\,dt$$

hvor κ er krumningen og v er hastigheden. *Hjælp*: Vis først, at påstanden holder, hvis der er tale om en naturlig parameterfremstilling, idet du bruger definitionen $\kappa=d\theta/ds$.

Opgave 251

Givet en kurve med parameterfremstilling

$$\vec{r}(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^3-1\\t^2+2t\end{pmatrix};\quad t\in\left]-3,3\right[$$

a) Bestem hastighedsvektoren og accelerationsvektoren til ethvert tidspunkt.

b) Vis, at der er tale om en *regulær* parametriseret kurve.

c) Bestem et udtryk for krumningen.

d) Bestem nogle kurvepunkter, hvor krumningen er 0.

e) Brug grafregneren til at skitsere banekurven.

Opgave 252

Bestem et udtryk for krumningen for den parametriserede kurve i opgave 211. Bestem dernæst en parameterfremstilling for krumningscirklerne i punkterne svarende til parametrene $t = 0$ og $t = 2$.

Opgave 311

Et klotoide-stykke med klotoide-parameter 600 og med længden 720 meter går over i en cirkelbue. I det følgende skal du benytte resultaterne fra punkterne a) - j) fra afsnit 3.1. Du kan eventuelt bruge et CAS-værktøj, såsom *Derive* eller *MathCAD*.

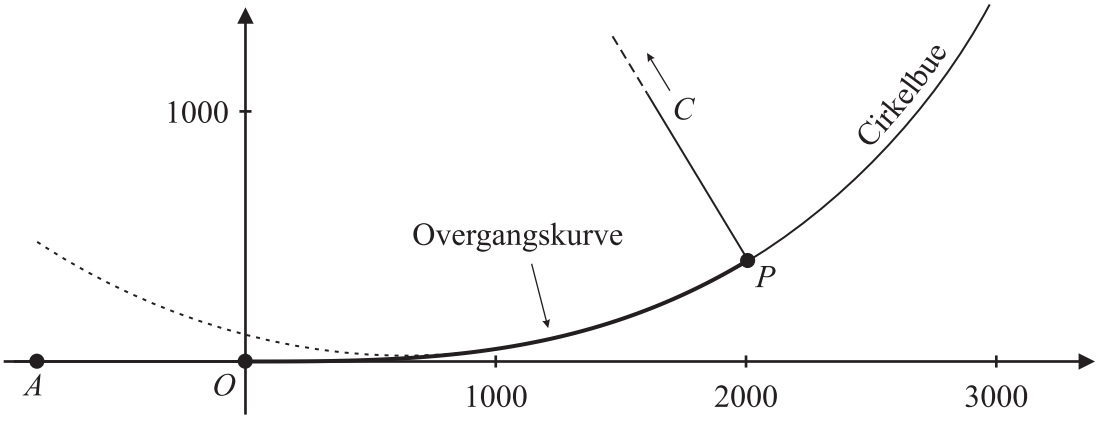
a) Bestem hvilken parameter *t*, som svarer til klotoide-stykkets endepunkt.
b) Bestem radius for krumningscirklen i klotoidestykkets endepunkt, samt koordinaterne for krumningscirklens centrum.
c) Tegn banekurven for klotoide-stykket og krumningscirklen.

Opgave 312

Man har undertiden også benyttet såkaldte *tredjegradsparabler* som overgangskurver inden for vejgeometrien. Hermed menes grafer for tredjegradspolynomier. Du skal regne på en sådan i det følgende. Linjestykket *AO* går over i grafen for tredjegradspolynomiet $f(x) = (5 \cdot 10^{-8}) \cdot x^3$, som videre fortsætter over i krumningscirklen i punktet *P*, som anført på figur 25. Alle mål er i meter.

a) Vis, at punktet $P(2000, 400)$ ligger på overgangskurven.
b) Bestem krumningen for tredjegradsparablen i punktet *P* (brug eventuelt formlen fra opgave 242).
c) Bestem radius samt centrum for krumningscirklen til tredjegradsparablen i *P*.
d) Argumenter for, hvorfor krumningen er kontinuert i *O*.

Figur 25



Opgave 313

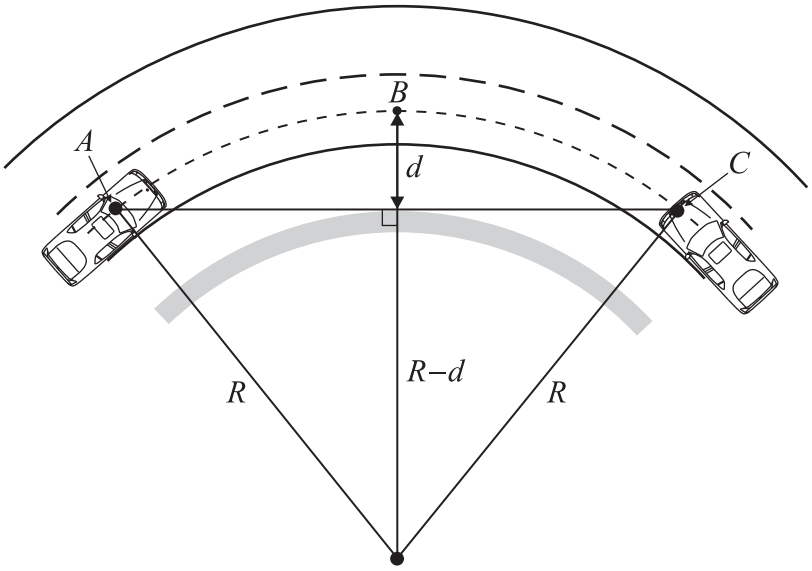
Prøv at frembringe klotoiden fra figur 9 ved hjælp af et CAS-værktøj, såsom *Derive* eller *MathCAD*. Parameterfremstillingen er givet under (25).

Opgave 314*

Som sagt skal der tages hensyn til mange forhold ved anlæggelse af en vej. Et af dem er *oversigtsforhold*. Chaufførerne i de enkelte køretøjer skal have mulighed for at se hinanden tilstrækkeligt tidligt til, at de kan foretage forskellige handlinger, såsom at foretage overhalinger eller standse eller undvige for farer. I det følgende skal vi betragte blot en enkelt af adskillige situationer: En bil kører i en horisontal cirkulær kurve med radius R og føreren skal kunne se en forhindring længere fremme på samme cirkel. Afstanden fra cirklen til nærmeste sigthindrende genstand betegnes d og *sigtelængden*, dvs. længden af cirkelbuen ABC, betegnes S.

a) Vis ved brug af figur 26 nedenfor, at hvis man tilnærmer sigtelængden med summen af længderne af korderne AB og BC, så fås sammenhængen $S^2 = 8Rd$.

Figur 26



Denne sammenhæng kan for eksempel bruges til at fastlægge den mindste radius man skal anlægge vejen med, givet en bestemt dimensioneringshastighed v og afstand d til nærmeste sigthæmmende genstand. Bilerne skal i det mindste kunne nå at standse inden de rammer hinanden. Det kræver en afstand svarende til det dobbelte af standselængden for én bil. *Standselængden* er summen af *reaktionslængden* og *bremselængden*. Reaktionslængden er det stykke, som bilen når at køre inden føreren når at opfatte faren, og den er klart lig med $v \cdot t_R$, hvor t_R er *reaktionstiden*. Bremselængden er det stykke bilen når i tidsrummet fra føreren opdager faren, til han har standset bilen. Man kan vise følgende formel for bremselængden, hvor a er den (negative) acceleration, som bilen har

under nedbremsning: $s_B = -v^2/(2a)$. Man kan vise, at den maksimale acceleration er lig med $-\mu \cdot g$, hvor μ er gnidningskoefficienten og g er tyngdeaccelerationen. Altså er standselængden mindst lig med

$$s = s_R + s_B = v \cdot t_R + \frac{v^2}{2\mu g}$$

b) Hvor stor skal radius i cirklen mindst være, hvis dimensioneringshastigheden er 60 km/t, reaktionstiden er 2 sekunder, gnidningskoefficienten sættes til 0,35 og afstanden til den nærmeste sigthæmmende genstand er 10 meter?

Opgave 321

Givet kurven med parameterfremstilling $\vec{r}(t) = (\cos(\frac{1}{2}t^2), \sin(\frac{1}{2}t^2)); t \geq 0$.

a) Bestem udtryk for hastighedsvektoren og farten.
b) Vis, at accelerationen udtrykt i det ledsagende koordinatsystem er: $\vec{a} = 1 \cdot \vec{t} + t^2 \cdot \vec{n}$.
c) Hvad kan du sige om bevægelsen?

Opgave 322

Givet kurven med parameterfremstilling $\vec{r}(t) = (t^2, t); t \in \mathbb{R}$.

a) Bestem udtryk for accelerationens tangential-komponent og normal-komponent.
b) Hvilke størrelser har komponenterne til tiden $t = \sqrt{2}$.
c) Til hvilket tidspunkt er normal-komponenten størst?

Opgave 331

En vej er dimensioneret til, at man kan køre 90 km/t på den. Den anlægges med en sidehældning på $i = 50$ promille. Radius i kurven er 400 meter.

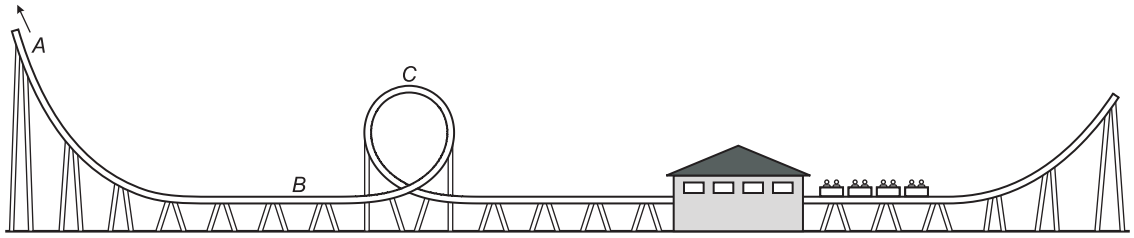
a) Omsæt sidehældningen til en vinkel α, idet $i = \tan(\alpha)$. Angiv resultatet i grader.
b) Benyt formel (34) og tabellen sidst i afsnit 3.3 til at afgøre, om man kan køre forsvarligt i kurven?
c) Hvad hvis man reducerer radius i kurven til 300 meter?

Opgave 421

I denne opgave skal du udregne hastigheder og *g*-påvirkninger i en rutsjebane. Vi vil antage, at der ikke er nogen gnidning eller luftmodstand, således at man kan udnytte at den mekaniske energi er bevaret. Antag, at rutsjebanevognen starter fra hvile i punktet *A* i et højdeniveau, som er 35 meter over højdeniveauet på det flade stykke i *B*. Antag endvidere, at loopet har en højde på 18 meter, dvs. punktet *C* ligger 18 meter højere oppe end *B*, samt at krumningsradius i toppen af loopet er 6,60 meter.

a) Benyt energibevarelse til at bestemme hastighederne i B og C.
b) Hvor stor er g-påvirkningerne i henholdsvis B og C?

Figur 27

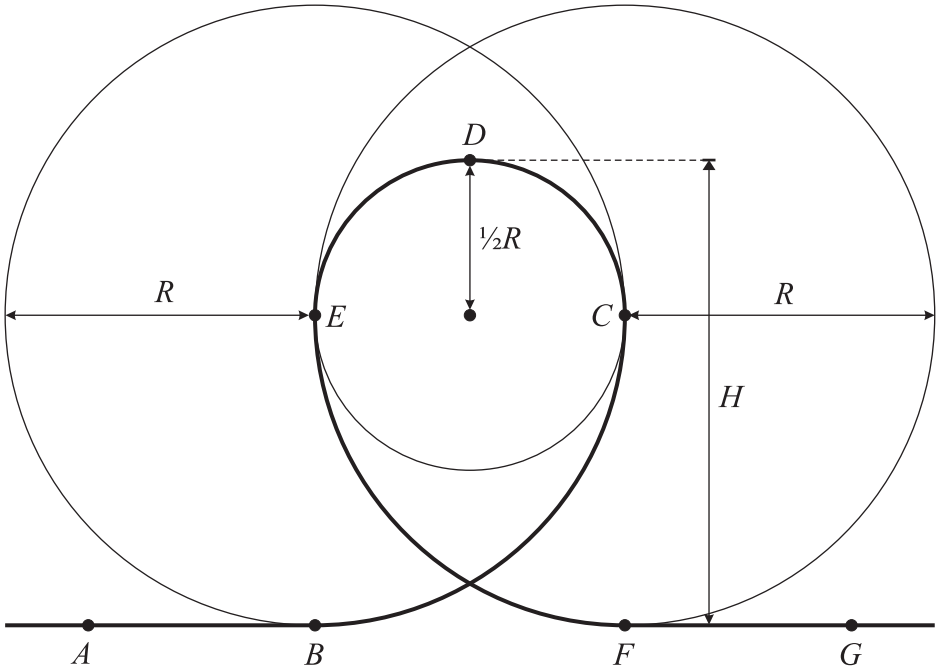


Opgave 422

På figur 28 forestiller vi os et loop sammensat af nogle rette linjestykker og nogle cirkelbuer med forskellig radius. Præcist hvordan fremgår af figuren.

a) Er kurven differentiabel?
b) Er krumningen kontinuert i alle punkter på kurven?

Figur 28



Antag, at $R = 16$ meter, og at farten af rutsjebanevognen på det flade stykke AB er lig med 90 km/t, samt at der kan regnes med bevarelse af den mekaniske energi under bevægelsen.

c) Bestem loopets højde H.

d) Udnyt energibevarelsen til at finde vognens fart i punkterne *C* og *D*?

e) Benyt formel (35) eller (36) til at bestemme den effektive tyngdeaccelerationsvektor samt *g*-påvirkningen umiddelbart efter, at vognen har passeret punkterne *B* og *C* og i punktet *D*. Argumenter i den forbindelse for, at fartens afledede v' er 0 i *B* og *D*. Det oplyses, at $v' = -g$ i punktet *C*.

Opgave 423* (Modelopgave)

I denne opgave skal vi opbygge en matematisk model for bevægelsen i et cirkulært loop. Vi skal se bort fra gnidning og luftmodstand, så vi kan benytte bevarelsen af den mekaniske energi, som er givet ved formlen $E_{\text{mek}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$. En parameterfremstilling for bevægelsen i loopet kan angives på formen $\vec{r}(t) = \left(R \cdot \cos(\phi(t)), R \cdot \sin(\phi(t))\right)$, hvor $\phi(t)$ angiver vinklen til tiden *t*, regnet i radianer i forhold til vandret. Startbetingelser i bunden af loopet i *B*: $v(0) = v_0$ (start-farten), $\phi(0) = -\frac{\pi}{2}$.

a) Bestem et udtryk for $\vec{v}(t)$ og vis følgende formel for farten: $v(t) = R \cdot \phi'(t)$.

b) Vis, at farten også kan udtrykkes ved $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR \cdot (1 + \sin(\phi(t)))}$, idet du udnytter energibevarelsen. *Hjælp*: Vis, at $h = R(1 + \sin(\phi(t)))$, hvis *h* sættes til 0 i B.

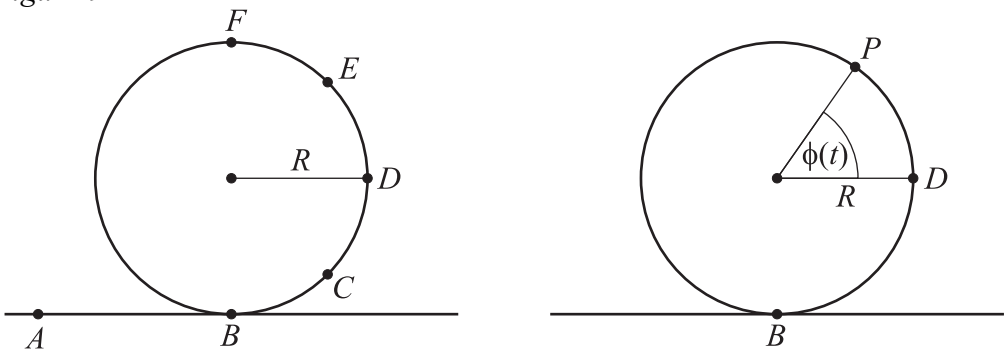
c) Differentier udtrykket for $v(t)$ i b) og vis, at $v'(t) = -g \cdot \cos(\phi(t))$. *Hjælp*: I de lidt vanskelige differentiationer med sammensatte funktioner fås et udtryk med $\phi'(t)$. Ifølge a) og b) kan $\phi'(t) = 1/R \cdot \sqrt{v_0^2 - 2gR \cdot (1 + \sin(\phi(t)))}$ da substitueres.

d) Benyt formlerne i b) og c) til at bestemme værdier for ϕ, v og v' i hvert af punkterne *C*, *D*, *E* og *F* samt umiddelbart efter passage af punktet *B*, idet det oplyses, at $v_0 = 27\,\text{m/s}$, $R = 8{,}10\,\text{m}$.

e) Ifølge (30) kan accelerationen skrives op som $\vec{a} = v' \cdot \vec{t} + (v^2/\rho) \cdot \vec{n}$, hvor $\vec{t}$ og $\vec{n}$ er enhedsvektorer i henholdsvis tangentens og normalens retning, og hvor ρ er krumningsradius, her lig med *R*. Indsæt værdierne udregnet i d) i udtrykket for $\vec{a}$, og brug det til at indtegne accelerationsvektoren i hvert af punkterne punkterne *B*, *C*, *D*, *E* og *F*. Tegn desuden tyngdeaccelerationsvektoren $\vec{g}$ og derefter den effektive tyngdeacceleration $\vec{g}_{\text{eff}} = \vec{g} - \vec{a}$ ind i hvert af punkterne.

f) Bestem $|\vec{g}_{\text{eff}}|$ og bestem g-påvirkningen i hvert af punkterne *B*, *C*, *D*, *E* og *F*.

Figur 29



g) Vis ved hjælp af a) og b), at vinkelfunktionen $\phi(t)$ i bevægelsen skal tilfredsstille følgende differentialligning: $\phi'(t) = 1/R \cdot \sqrt{v_0^2 - 2gR \cdot (1 + \sin(\phi(t)))}$.

h) Løsningen til differentialligningen under g) kan ikke udtrykkes ved de sædvanlige funktioner. Derfor må man ty til *numeriske metoder*. Den såkaldte *Standard Runge-Kutta-metode af orden 4* kan med fordel benyttes. Hvis du har adgang til et CAS-værktøj, såsom *Derive*, kan du anvende nævnte numeriske metode. Det vil kunne give dig vinklen $\phi(t)$ for en række valgte værdier for tiden t. Prøv det!

Hjemmesider

www.vejregler.dk (masser af information fra vejdirektoratet).
www.2dcurves.com (omfattende side med kurver i planen).
www.matematiksider.dk/vejgeometri.html (mere om vejgeometri på min hjemmeside).
www.rcdb.com (en stor database om rutsjebaner).
www.coasterforce.com.

Litteratur

[1] Jørgen Dejgaard & Claus Michelsen. *Trafikmodeller*. Matematikkens aspekter fra Matematiklærerforeningen, 2001. (bogen kan bruges til at studere andre sider af matematik i forbindelse med veje og trafik).

[2] Fr. Fabricius-Bjerre. *Lærebog i geometri II. Differentialgeometri og kinematisk geometri*. 6. udgave, 1. oplag. Polyteknisk forlag, 1977.

[3] Dr.-Ing. E. H. Hans Lorenz. *Trassierung und Gestaltung von Strassen und Autobahnen*. Bauverlag GMBH.

[4] Mogens Nørgaard Olesen. *Plane kurver*. Systime, 1984.

[5] Bent Thagesen (redaktør). *Lærebog i vejbygning. Bind 1. Trafik og geometri*. Polyteknisk Forlag, 1991.

[6] Bent Thagesen (redaktør). *Veje og stier*. Polyteknisk forlag, 1. udgave, 2. oplag, 2000.