Christiansborg

Mandatfordelinger

Største brøks metode, D'Hondts metode, Sainte-Laguës metode, Lige store forholds metode, etc.

Billedliste

Forside: ©VectorStock/Saransk (Christiansborg)
Side 21: ©iStock.com/ Yurchello108 (Alexander Hamilton).
Side 23: ©iStock.com/THEPALMER (Thomas Jefferson).
Side 26: ©iStock.com/alekseykh (US Capitol, Washington D.C.).

Tillæg til emnet mandatfordelinger

Dette tillæg indeholder sætninger og opgaver, som uddyber emnet mandatfordelinger i forhold til min hjemmeside og den udmærkede lille bog [1] nævnt bagerst. Tillægget kan eventuelt hjælpe i udforskningen af emnet, for eksempel i forbindelse med et projekt.

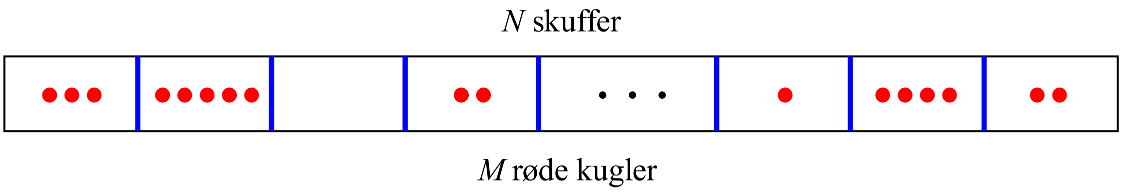
Sætning 1

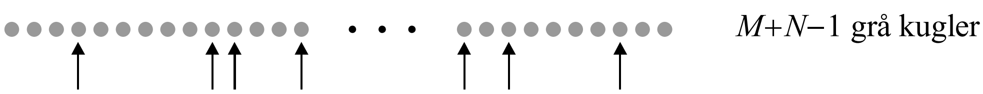
Antag at M mandater skal fordeles mellem N partier. Hvis der ikke er noget krav om et mindstetal af mandater til hvert parti, så er antallet af måder mandaterne kan fordeles på, givet ved følgende binomialkoefficient:

$$\binom{M+N-1}{N-1}$$

Specielt er der altså endeligt mange mandatfordelinger!

Løsning: Én mandatfordeling svarer til at anbringe M ens røde kugler i N forskellige skuffer. Hvor mange måder kan man gøre det på? Man kan nå frem til svaret via følgende elegante argument: Der er en *én-til-én korrespondance* mellem en skuffefordeling og en udtrækning af $N-1$ kugler ud af $M+N-1$ forskellige grå kugler. De udtrukne kugler skal svare til de blå kassemellemrum, resten til røde kugler! Situationen er illustreret på nedenstående figur.



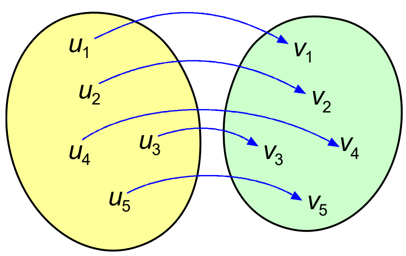


Antallet af muligheder fås herefter nemt til $\binom{M+N-1}{N-1}$.

□

Bemærkning 2

Med en *én-til-én korrespondance* mellem to endelige mængder menes, at et element i den ene mængde korresponderer med netop et element i den anden mængde og modsat. Dermed har de to mængder lige mange elementer.



Opgave 3

Betragt eksemplet, hvor der er 5 mandater, som skal tildeles tre forskellige partier.

a) Hvor mange forskellige mandatfordelinger er der ifølge sætning 1?

b) Prøv at opskrive alle mulige mandatfordelinger. Det er overkommeligt her.

Betragt det tilfælde, hvor de 5 mandater er fordelt på følgende måde: Parti A får 1 mandat, parti B får 3 mandater og parti C får 1 mandat.

b) Angående beviset til sætning 1: Hvilke grå kugler er det, der er blevet udtrukket i dette konkrete tilfælde?

Opgave 4

I alt M mandater ønskes fordelt mellem N partier, men på en sådan måde, så hvert parti får mindst k mandater.

a) Vis, at det kan gøres på følgende antal måder:

$$\binom{M - k \cdot N + N - 1}{N - 1}$$

b) Betragt igen eksempel 2 med 5 mandater og 3 partier. Antag nu, at hvert parti skal have mindst 1 mandat. Hvor mange måder kan det gøres på? Opskriv desuden de mulige mandatfordelinger.

Vi har brug for at definere en række størrelser, som vi skal bruge i resten af dokumentet. Nogle af dem er allerede anvendt ovenfor.

Definition 5

M : Samlede antal mandater

S : Totale antal stemmer

N : Antallet af partier

s_P : Stemmetal for parti P

m_P : Mandattal for parti P

k_P : Kvota for parti P, dvs. det antal mandater, som partiet fortjener set i relation til partiets andel af stemmerne. Må gerne være et kommatal.

s : Den gennemsnitlige mandatpris, dvs. så mange stemmer, som det kræver for at få gennemsnitligt ét mandat set i relation til det totale antal stemmer og det samlede antal mandater. Må gerne være et kommatal.

Disse definitioner giver umiddelbart anledning til de formler, som er angivet i sætning 6 på næste side.

Sætning 6

Der gælder følgende formler:

a) $M = \sum_P m_P$

b) $S = \sum_P s_P$

c) $k_P = M \cdot \dfrac{s_P}{S}$

d) $s = \dfrac{S}{M}$

Bemærk, at vi bruger et summationstegn i en kompakt form. Hvis der summeres over de N partier $P_1, P_2, \ldots, P_N$, så betyder det følgende, vist for formlen i sætning 6 a):

(1) $$M = \sum_P m_P = \sum_{i=1}^{N} m_{P_i} = m_{P_1} + m_{P_2} + \ldots + m_{P_N}$$

Der gælder nogle simple regler for regninger med endelige summer:

Sætning 7

Der gælder følgende regneregler for endelige summer, hvor k er en konstant:

a) $\sum_{i=1}^{N} (k \cdot a_i) = k \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i$ (*k*-regel)

b) $\sum_{i=1}^{N} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i + \sum_{i=1}^{N} b_i$ (Sumregel)

c) $\sum_{i=1}^{N} (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^{N} a_i - \sum_{i=1}^{N} b_i$ (Differensregel)

Bevis: Lad os bevise *k*-reglen:

$$\sum_{i=1}^{N} (k \cdot a_i) = k \cdot a_1 + k \cdot a_2 + \ldots + k \cdot a_N = k \cdot (a_1 + a_2 + \ldots + a_N) = k \cdot \sum_{i=1}^{N} a_i$$

De øvrige overlades til læseren.

□

Vi har altså, at kan man sætte konstanter udenfor summationstegnet. Har vi at gøre med en sum eller differens af to størrelser, som i b) og c), så kan vi sætte et summationstegn på hvert led. Der gælder derimod ikke nogen simpel produktregel (overvej).

Sætning 8

Forskellen mellem mandattallene og de respektive kvota summeret over alle partier giver altid 0:

$$\sum_{i=1}^{N}(m_i - k_i) \;=\; 0$$

Bevis: Ifølge sætning 7c) gælder: $\sum_{i=1}^{N}(m_i - k_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i - \sum_{i=1}^{N} k_i$

Benyt herefter sætning 6 a), b) og c) samt sætning 7a). Detaljerne overlades til læseren.

□

Eksempel 9

Lad os sige, at et parti P ved et valg har modtaget 548610 stemmer, og at der ved valget er afgivet i alt 3367024 stemmer. Antag at der til landets parlament skal vælges 151 mandater. Vi kan da udregne partiets kvota k_P via formlen i sætning 6c):

$$k_P \;=\; M \cdot \frac{s_P}{S} \;=\; 151 \cdot \frac{548610}{3367024} \;=\; 24{,}60$$

Det virker retfærdigt set fra partiets synspunkt, at partiet modtager den andel af mandaterne, som svarer til partiets andel af stemmerne. Problemet er bare, at det ikke giver et helt tal. Man kan nok blive enig om, at partiet enten skal have 24 mandater eller 25 mandater, måske endda 25, hvis man benytter afrunding. Det forekommer altså mest retfærdigt, hvis størrelsen $(m_P - k_P)^2$ er så lille som mulig. I definition 10 skal vi indføre et mål for uretfærdighed i forbindelse med en tildeling af mandater ved et valg.

□

Definition 10 (Mål for uretfærdighed - Partisynspunkt)

Ved et valg har N partier $P_1, P_2, \ldots, P_N$ opnået stemmetallene $s_1, s_2, \ldots, s_N$. Der skal uddeles i alt M mandater. Kvotaerne for partierne betegnes $k_1, k_2, \ldots, k_N$. Da kan man til en mandatfordeling $m_1, m_2, \ldots, m_N$ til partierne knytte følgende mål for uretfærdigheden set fra et partisynspunkt:

$$U_P \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(m_i - k_i)^2} \;=\; \sqrt{(m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 + \ldots + (m_N - k_N)^2}$$

Jo mindre tallet er, jo mindre uretfærdig (dvs. mere retfærdig) er fordelingen, når man ser det fra et partisynspunkt.

Eksempel 11

Vi skal undersøge forskellige mandatfordelingsmetoders uretfærdighed set fra et partisynspunkt i et konkret eksempel: *Største brøks metode*, *D'Hondts metode*, *Sainte-Laguës metode*, *Den modificerede Sainte-Laguës metode* og *Lige store forholds metode*. De fire sidstnævnte er alle såkaldte *divisormetoder*, mens den første ikke er.

Største brøks metode					
Parti	Stemmer	Kvota	Heltal	Brøk	Antal
A	70	0,7	0	**0,7**	**1**
B	210	2,1	2	0,1	**2**
C	570	5,7	5	**0,7**	**6**
D	150	1,5	1	0,5	**1**

D'Hondts metode					Divisorer				
Parti	Stemmer	1	2	3	4	5	6	7	8	Antal
A	70	70	35	23	17	14	11	10	8	**0**
B	210	**210**	**105**	70	52	42	35	30	26	**2**
C	570	**570**	**285**	**190**	**142**	**114**	**95**	**81**	71	**7**
D	150	**150**	75	50	37	30	25	21	18	**1**

Sainte-Laguës metode					Divisorer					
Parti	Stemmer	1	3	5	7	9	11	13	15	Antal
A	70	**70**	23	14	10	7	6	5	4	**1**
B	210	**210**	**70**	42	30	23	19	16	14	**2**
C	570	**570**	**190**	**114**	**81**	**63**	**51**	43	38	**6**
D	150	**150**	50	30	21	16	13	11	10	**1**

Den modificerede Sainte-Laguës metode					Divisorer					
Parti	Stemmer	1,4	3	5	7	9	11	13	15	Antal
A	70	50	23	14	10	7	6	5	4	**?**
B	210	**150**	**70**	42	30	23	19	16	14	**2**
C	570	**407**	**190**	**114**	**81**	**63**	**51**	43	38	**6**
D	150	**107**	50	30	21	16	13	11	10	**?**

Lige store forholds metode					Divisorer					
Parti	Stemmer	0	1,41	2,45	3,46	4,47	5,48	6,48	7,48	Antal
A	70	**∞**	49	28	20	15	12	10	9	**1**
B	210	**∞**	**148**	85	60	46	38	32	28	**2**
C	570	**∞**	**403**	**232**	**164**	**127**	104	87	76	**5**
D	150	**∞**	**106**	61	43	33	27	23	20	**2**

I eksemplet er der afgivet 1000 stemmer og i alt 10 mandater skal fordeles mellem fire partier A, B, C og D. Stemmetallene for partierne er henholdsvis 70, 210, 570 og 150. Hvad angår største brøks metode, så udregner vi partiernes kvota via formel c) i sætning

6. Kvotaen for parti C er for eksempel $k_C = M \cdot s_C / S = 10 \cdot 570/1000 = 5{,}7$. Partiet får da i første omgang tildelt et mandattal, som svarer til heltalsdelen af dette tal: $\lfloor 5{,}7 \rfloor = 5$. De øvrige partiers heltalsdele kan ses i den øverste tabel. Herefter mangler der at blive uddelt $10 - 0 - 2 - 5 - 1 = 2$ mandater. Her ser vi på de største brøkdele, som står i søjlen "Brøk". De sidste to mandater uddeles til de partier, som har de største brøkdele, som er partierne A og C (brøkdel 0,7). I alt fås altså følgende mandatfordeling for partierne A, B, C og D: 1, 2, 6 og 1, som ses i søjlen yderst til højre.

Divisormetoderne fungerer alle på den samme måde: Man tager stemmetallene for hvert parti og dividerer dem med en række divisorer. I tilfældet med d'Hondt er divisorerne alle naturlige tal: 1, 2, 3, …. For Sainte-Laguës metode er det alle de ulige tal: 1, 3, 5, … For den modificerede Sainte-Laguës metode er den første divisor 1 udskiftet med 1,4. Endelig er der de lige store forholds metode, hvor divisorerne er givet ved *det geometriske middeltal* mellem et naturligt tal n og det forrige: $\sqrt{n \cdot (n-1)}$. For $n = 1, 2, \ldots$ giver det divisorerne: $\sqrt{1 \cdot (1-1)} = \sqrt{0} = 0$, $\sqrt{2 \cdot (2-1)} = \sqrt{2} = 1{,}4142$, $\sqrt{3 \cdot (3-1)} = \sqrt{6} = 2{,}4495$, etc. I en divisormetode tager man partiets stemmetal og dividerer med alle divisorerne én efter én. Derved fås man en masse kvotienter. Man sorterer nu rækken af kvotienter for alle partierne, så de N største (her 10) får tildelt et mandat. I tilfældet med D'Hondts metode ser man kvotienterne stå i de lysegule felter i den næstøverste tabel på forrige side. De kvotienter, som giver anledning til et mandat for de enkelte partier, er fremhævet med rødt. Den mindste kvotient, som giver anledning til et mandat, er her 81. Kvotienterne for partiet A er for eksempel:

$$\frac{70}{1} = 70\,; \quad \frac{70}{2} = 35\,; \quad \frac{70}{3} = 23{,}33\,; \quad \frac{70}{4} = 17{,}5\,; \quad \frac{70}{5} = 11{,}67\,; \quad \frac{70}{6} = 8{,}75\,; \quad \ldots$$

I tabellen er kvotienterne for overskuelighedens skyld afrundet til hele tal, men er de afgørende afrundede kvotienter ens, kigger man på deres decimaler. I tilfældet med Den modificerede Sainte-Laguës metode ser vi endda et eksempel på en *uafgjort situation*, idet vi ser to ens kvotienter, som er eksakt 50 (fremhævet med kraftig gul farve), og der er kun er ét mandat tilbage til deling. Derfor kan vi ikke fuldføre mandatfordelingen. Uafgjorte situationer sker sjældent, hvis der er stemmetal af blot en nogenlunde pæn størrelse. I eksemplet er valgt meget runde stemmetal for at gøre det simpelt og for at kunne vise dette fænomen. Bemærk, at vi i tilfældet med lige store forholds metode har skrevet ∞ ud for partiernes første kvotient. Det skyldes at den første divisor er 0. I praksis betyder det, at hvert parti skal have tildelt mindst 1 mandat!

Nu til målet for uretfærdighed for hver af ovenstående mandatfordelingsmetoder. For største brøks metode får vi:

$$U_P \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (m_i - k_i)^2} \;=\; (1-0{,}7)^2 + (2-2{,}1)^2 + (6-5{,}7)^2 + (1-1{,}5)^2 \;=\; 0{,}44$$

For D'Hondts metode fås:

$$U_P \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (m_i - k_i)^2} \;=\; (0-0{,}7)^2 + (2-2{,}1)^2 + (7-5{,}7)^2 + (1-1{,}5)^2 \;=\; 2{,}44$$

Sainte-Laguës metode giver samme værdi for uretfærdigheden som største brøks metode, da de har samme mandatfordeling. Endelig er der lige store forholds metode:

$$U_P \;=\; \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(m_i-k_i)^2} \;=\; (1-0{,}7)^2+(2-2{,}1)^2+(5-5{,}7)^2+(2-1{,}5)^2 \;=\; 0{,}84$$

Spørgsmålet er, om der generelt set gælder, at en af mandatfordelingsmetoderne vil være bedst med hensyn til retfærdighed på partiniveau, eller rettere mindst uretfærdig? Svaret er ja, som vi snart skal se. Største brøks metode vil altid have den mindst mulige retfærdighed uanset hvilken mandatfordelingsmetode, man kunne finde på, herunder andre end dem nævnt i dette eksempel. En anden ting, før vi afslutter eksemplet: Vi ser også fra eksemplet, at der godt kan være 2 mandater i forskel på hvor mange mandater et parti får tildelt: Se parti C!

□

Opgave 12

Ved et valg til en hovedbestyrelse er der 4 lister, som kan sammenlignes med partier. Spørgsmålet er hvor mange personer, hver liste skal repræsenteres af i hovedbestyrelsen, hvori der er 9 sæder (altså 9 mandater). Ved valget faldt stemmetallene således ud:

Liste A:	86
Liste B:	648
Liste C:	327
Liste D:	217

a) Udregn i stil med eksempel 11 mandattallene for hver af de fire lister i tilfældene med følgende mandatfordelinger:

1) Største brøks metode
2) D'Hondts metode
3) Sainte-Laguës metode
4) Den modificerede Sainte-Laguës metode
5) Lige store forholds metode.

Brug gerne et regneark til opgaven. Bemærk, at heltalsdelen af et tal i Excel kan beregnes ved hjælp af formlen = HELTAL().

b) Bestem værdien for uretfærdigheden U_P for hver metode.

Hjælpesætning 13

a) Der gælder følgende identitet:

$$\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)-\left(x^2+y^2\right) \;=\; -2x-2y+2$$

b) Hvis $x-y>1$ så er udtrykket $\left((x-1)^2+(y+1)^2\right)-\left(x^2+y^2\right)$ negativt.

Bevis: Overlades til læseren. □

Af praktiske årsager indfører vi følgende sum:

(2) $$S_P = U_P^2 = (m_1 - k_1)^2 + (m_2 - k_2)^2 + \ldots + (m_N - k_N)^2$$

Hjælpesætning 14

Antag, at der flyttes et mandat fra partiet P_s til parti P_t.

a) Ændringen ΔS_P i summen S_P kan da udtrykkes således:

$$\Delta S_P = -2 \cdot (m_s - k_s) - 2 \cdot (m_t - k_t) + 2$$

hvor værdierne for mandater og kvotaer er fra *før* flytningen.

b) Vis, at hvis $(m_s - k_s) - (m_t - k_t) > 1$, da er ΔS_P negativ.

Bevis: Mange af leddene i summen S_P er de samme før og efter flytningen. Kun leddene for partierne P_s og P_t ændres. Før flytningen er disse to partiers bidrag til summen lig med $(m_s - k_s)^2 + (m_t - k_t)^2$. Efter flytningen er det $(m_s - 1 - k_s)^2 + (m_t + 1 - k_t)^2$. Herefter kan ændringen ΔS_P udregnes. a) følger herefter af hjælpesætning 13 med $x = m_s - k_s$ og $y = m_t - k_t$. Detaljerne overlades til læseren. b) fås af hjælpesætning 13b).

□

Opgave 15

Betragt skemaet for største brøks metode i eksempel 11. Benyt hjælpesætning 14a) til at vise, at hvis vi fraveg største brøks metode og flyttede et mandat fra parti A til parti C (hvilket i øvrigt netop er den mandatfordeling D'Hondts metode vil give), så ville det give en ændring i summen S_P på 0,8. Flytningen vil altså medføre en større uretfærdighed set fra et partisynspunkt.

Før vi går videre til den næste vigtige sætning, skal vi bruge en simpel egenskab for heltalsdelen $\lfloor x \rfloor$ til et tal x, nemlig:

(3) $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Det er simpelt. Betragt for eksempel tallet 3,62. Dets heltalsdel er $\lfloor 3{,}62 \rfloor = 3$. Dette tal ligger klart mellem $x - 1 = 2{,}62$ og $x = 3{,}62$. Det eneste tilfælde, hvor man får lighedstegnet i den højre ulighed er, hvis x er et helt tal. Tag for eksempel $x = 5$. Her har vi $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Dette tal er større end $x - 1 = 4$ og lig med $x = 5$.

Sætning 16 (Uretfærdighed fra partisynspunkt)

Den mest retfærdige mandatfordelingsmetode i forhold til målet U_P fra definition 10 er *største brøks metode*.

Bevis: Vi skal vise, at blandt alle mulige mandatfordelinger er den, der gør U_P mindst mulig den, der fremkommer ved at bruge Største brøks metode. Det er nok at skulle minimere summen S_P defineret i (2). Antallet af mulige mandatfordelinger er *endeligt* ifølge sætning 1. Derfor er der en af mandatfordelingerne, som er mindst lige så lille, som alle de andre. Første påstand: Denne *minimale mandatfordeling* må opfylde:

(4) $$m_i = \lfloor k_i \rfloor \text{ eller } m_i = \lfloor k_i \rfloor + 1 \text{ for } i = 1, 2, \ldots, N$$

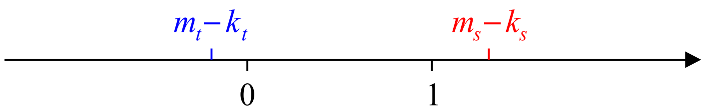
Antag modsætningsvist, at en af mandattallene m_s opfylder at $m_s > \lfloor k_s \rfloor + 1$. Da begge sider i den skarpe ulighed er hele tal, må forskellen mellem siderne være mindst 1, dvs. vi får $m_s \geq \lfloor k_s \rfloor + 1 + 1$ altså $m_s \geq \lfloor k_s \rfloor + 2$. Bruger vi venstre ulighed i (3) fås:

(5) $$k_s - 1 + 2 < \lfloor k_s \rfloor + 2 \leq m_s \quad \Leftrightarrow \quad 1 < m_s - k_s$$

Det s'te led i summen $\sum_{i=1}^{N}(m_i - k_i)$ er altså større end 1. Derfor må der også være et negativt led, da summen ifølge sætning 8 er lig med 0. Lad os sige, at det er leddet for partiet P_t. Altså $m_t - k_t < 0$. Denne ulighed giver sammen med (5) følgende:

(6) $$(m_s - k_s) - (m_t - k_t) > 1$$

Den første parentes er med andre ord mere end 1 større ende den anden parentes.



Idéen er nu at flytte et mandat fra partiet P_s til partiet P_t. På grund af (6), kan vi bruge hjælpesætning 14 til at konkludere, at ΔS_P er negativ. Vi har altså flyttet et mandat og fået en sum S_P, som er mindre. Det er er en modstrid, da mandatfordelingen var valgt til at være minimal! Vi konkluderer, at antagelsen om at $m_s > \lfloor k_s \rfloor + 1$ ikke kan være rigtig, hvorfor der må gælde, at $m_i \leq \lfloor k_i \rfloor + 1$ for alle $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Vi mangler nu at vise, at $m_i \geq \lfloor k_i \rfloor$ for alle $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Beviset herfor er igen et modstridsbevise, som er meget i stil med det ovenfor. Det overlades til læseren i opgave 17 nedenfor. Vi kan herefter sige god for, at den minimale mandatfordeling opfylder (4).

Vi kan nu betragte situationen på følgende måde: Alle partierne starter med at få det antal mandater, som svarer til heltalsdelen af deres kvotaer, altså $\lfloor k_i \rfloor$ for $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Spørgsmålet er hvilke partier, som skal have et ekstra mandat? Rent intuitivt synes det klart, at man gør summen S_P i (2) mindst, hvis man vælger at tildele et ekstra mandat til de partier, som har den største brøkdel, hvilket netop er *største brøks metode*. Vi kan dog også vise det rent formelt. Kvotaen k_i for partiet P_i kan opdeles i heltalsdelen $\lfloor k_i \rfloor$ og brøkdelen r_i : $k_i = \lfloor k_i \rfloor + r_i$, hvor $0 \leq r_i < 1$. Lad os se på, hvad der sker med partiets bidrag $(m_i - k_i)^2$ til S_P, når der tildeles et ekstra mandat:

$$\text{Før:} \qquad \left(\lfloor k_i \rfloor - k_i\right)^2 = (-r_i)^2 \;=\; r_i^2$$

$$\text{Efter:} \qquad \left(\lfloor k_i \rfloor + 1 - k_i\right)^2 = (1-r_i)^2 \;=\; r_i^2 + 1 - 2r_i$$

Tilvæksten fra før tildelingen til efter tildelingen af det ekstra mandat er altså $1-2r_i$. Heraf ses, at jo større brøkdel r_i jo mindre tilvækst i S_P. Hermed er det ønskede vist.

□

Opgave 17

I beviset for sætning 16 manglede vi at redegøre for, at mandattallene i den minimale mandatfordeling opfylder $m_i \geq \lfloor k_i \rfloor$ for alle $i \in \{1,2,\ldots,N\}$. Vis dette.

Hjælp: Vis modsætningsvist, at hvis der findes et parti P_t, hvor $m_t < \lfloor k_t \rfloor$, så opnås en modstrid. Bemærk, at da både m_t og $\lfloor k_t \rfloor$ er hele tal, må m_t være mindst 1 mindre end $\lfloor k_t \rfloor$, hvorved $m_t + 1 \leq \lfloor k_t \rfloor \leq k_t$. Så $m_t - k_t \leq -1$. Der må ifølge sætning 8 findes et parti P_s med $m_s > k_s$. Brug herefter hjælpesætning 14 med de samme værdier for x og y, som i beviset for sætning 16. Fuldfør detaljerne.

Geometrisk fortolkning for tre partier

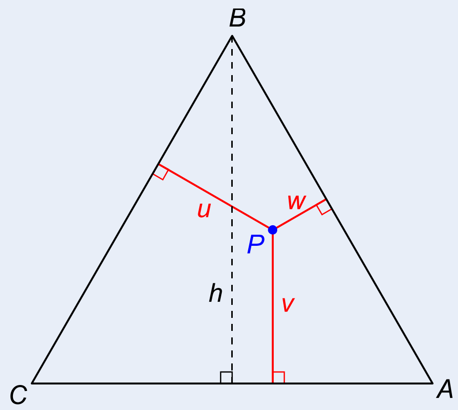
I tilfældet med kun tre partier findes der en elegant måde at visualisere mandatfordelingen mellem de tre partier på. Metoden giver desuden en bedre forståelse af forskellen mellem de forskellige mandatfordelingsmetoder og er også nyttig til at få et indblik i hvornår og hvorfor de forskellige paradokser opstår. Udgangspunktet er en ligesidet trekant. Her gælder følgende smukke egenskab:

Sætning 18

Givet et punkt P, som ligger inde i en ligesidede trekant ABC eller på trekantens rand. Betegn afstandene fra P til siderne a, b og c med henholdsvis u, v og w. Da gælder:

$$u + v + w \;=\; h \tag{7}$$

hvor h er højden i den ligesidede trekant.



Bevis: Betragt trekanterne BPC, CPA og APB. Størrelserne u, v og w er højder i nævnte trekanter. Betragt herefter summen af arealerne af de tre trekanter og sammenhold det med arealet af hele den ligesidede trekant. Derved knyttes den ønskede sammenhæng mellem u, v og w og h. Kald for eksempel sidelængden i trekanten for L. Detaljerne overlades til læseren. □

Med sætning 18 in mente kan man både repræsentere en stemmefordeling og en mandatfordeling ved et punkt i en ligesidet trekant. Men lad os først definere, hvad vi vil mene med et punkt i den ligesidede trekant. Jeg afviger her lidt fra kilden [1] ved at arbejde i en ligesidet trekant, hvor højden er 1 og desuden regne med *andele* i stedet for procenter.

Definition 19 (Punktet hørende til en fordeling)

Givet tre ikke-negative tal t_1, t_2 og t_3, hvor ikke alle tal er 0. Et punkt *P* i den ligesidede trekant *ABC* siges at repræsentere fordelingen (t_1, t_2, t_3), hvis afstandene til trekantens sider (jf. sætning 8) er givet ved:

$$u = \frac{t_1}{t_1+t_2+t_3}\,, \quad v = \frac{t_2}{t_1+t_2+t_3}\,, \quad w = \frac{t_3}{t_1+t_2+t_3}$$

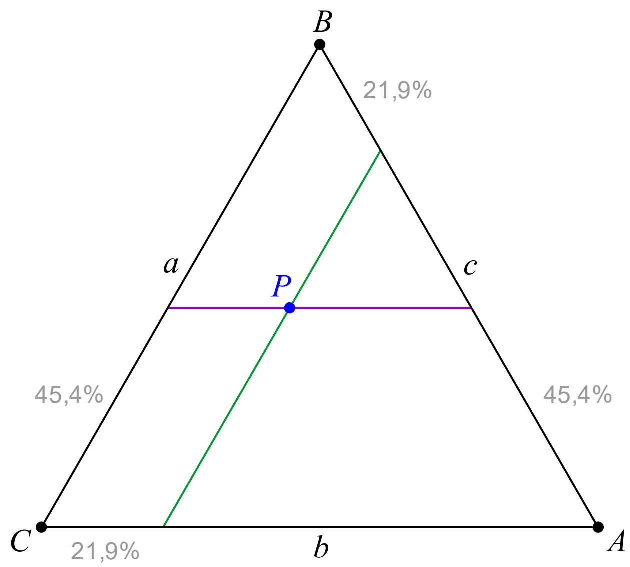
Kilden [1] arbejder på et senere tidspunkt i en trekant med sidelængde 1. Jeg finder det derimod mere hensigtsmæssigt at vælge, at højden skal være 1, fordi sætning 18 da sikrer, at $u+v+w=1$. Derved undgås det lidt mere diffuse om at regne i procenter af højden. I definition 19 udgør *u* altså den *andel*, som t_1 udgør af summen $t_1+t_2+t_3$. Tilsvarende med *v* og *w*. Vi skal se på nogle eksempler.

Eksempel 20

Partierne *A*, *B* og *C* har under et valg modtaget følgende stemmetal: $s_A = 348$, $s_B = 723$ og $s_C = 520$. Det totale stemmetal er dermed: $S = s_A + s_B + s_C = 348+723+520 = 1591$. Det giver følgende stemmeandele, afrundet til tre decimaler:

$$\frac{s_A}{S} = 0{,}219 \quad \frac{s_B}{S} = 0{,}454 \quad \frac{s_C}{S} = 0{,}327$$

Stemmefordelingen $(348, 723, 520)$ giver altså anledning til det punkt *P* i den ligesidede trekant, som er beskrevet ved $u = 0{,}219;\ v = 0{,}454$ og $w = 0{,}327$.



Man kan afsætte punktet på følgende måde i den ligesidede trekant: Man duplikerer siden a og parallelforskyder denne (grønne) linje 21,9% hen langs de øvrige to sider, som vist med lysegrå farve på figuren. På samme måde duplikeres siden b og parallelforskydes 45,4% op langs de øvrige to sider. Det er vist med den lilla linje. Der hvor de to linjer skærer hinanden, har man det søgte punkt P. Dette punkt vil hermed automatisk opfylde $u = 0{,}219$; $v = 0{,}454$ og $w = 0{,}327$, hvis vi vedtager, at højden i den ligesidede trekant er 1 eller 100% (det hele). Man registrer også, at et punkt på siden a svarer til, at partiet A slet ikke har fået nogen stemmer, mens punktet i hjørnet A svarer til at partiet A har fået alle stemmerne.

Opgave 21

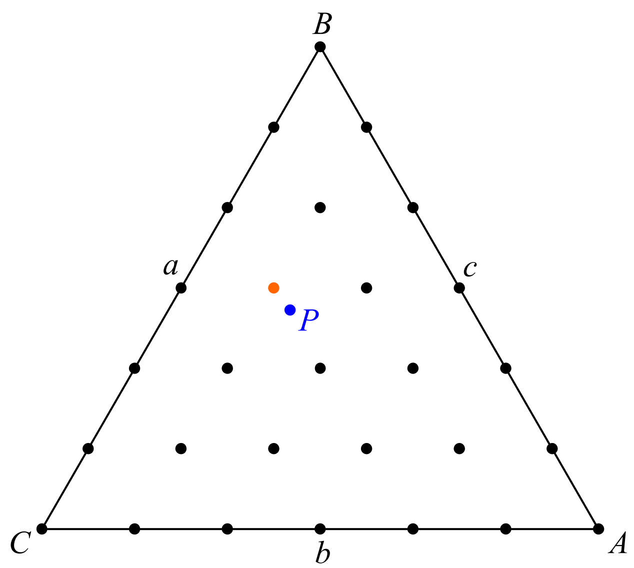
I det følgende starter man med at tegne en ligesidet trekant med højde 1. Lad for eksempel 1 svare til 10 cm på papiret.

a) Indtegn det punkt, som svarer til følgende stemmetal:
$s_A = 4203$, $s_B = 6183$ og $s_C = 2740$.

b) Indtegn det punkt, som svarer til følgende stemmetal:
$s_A = 8200$, $s_B = 0$ og $s_C = 3500$.

Eksempel 22

Lad os sige, at der i tilfældet i eksempel 20 er 6 mandater at fordele. Det giver anledning til et gitter af punkter bestående af 6 lag parallelle med hver side. I eksemplet herunder repræsenterer det orange punkt for eksempel, at $m_A = 1$, $m_B = 3$ og $m_C = 2$, altså at partierne A, B og C får henholdsvis 1, 3 og 2 mandater. Mandatfordelingen betegnes $(1,3,2)$. Ifølge definition 19 er den repræsenteret af $u = 1/6$, $v = 3/6$ og $w = 2/6$ i den ligesidede trekant.



Det blå punkt P, som repræsenterer stemmetallet fra eksempel 20, er også indtegnet. Da det ikke er sammenfaldende med et af mandatpunkterne, vil der opstå en vis form for "uretfærdighed" for mindst ét af partierne. Det kan være, at mandatfordelingen i eksempel 19 kommer til at ende med mandatfordelingen $(1,3,2)$, svarende til det orange punkt, men det afhænger af mandatfordelingsmetoden. Det er ikke altid det nærmeste punkt til P, som bliver resultatet!

□

Opgave 23

a) Hvilke punkter i figuren i eksempel 22 svarer til mandatfordelingerne $(4,1,1)$ $(3,0,3)$ og $(0,0,6)$?

b) Tegn selv en ligesidet trekant med indtegning af det gitter af punkter, som svarer til, at der uddeles 4 mandater.

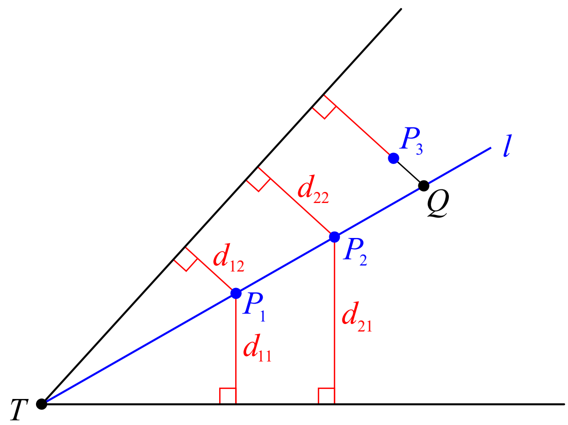
Hjælpesætning 24

Givet en spids vinkel. To punkter P_1 og P_2 i vinkelgabet ligger på den samme rette linje gennem vinklens toppunkt T, hvis og kun hvis forholdet mellem afstanden til vinklens ene ben og afstanden til vinklens andet ben er det samme for de to punkter.

Bevis: Situationen er vist på figuren. Man viser ret nemt med ensvinklede trekanter, at hvis de to punkter P_1 og P_2 ligger på en ret linje gennem T, så gælder:

$$\frac{d_{11}}{d_{12}} = \frac{d_{21}}{d_{22}}$$

Antag derimod, at et punkt P_3 *ikke* ligger på linjen l gennem T og P_1. Så vil punktet Q have samme forhold for afstandene som P_1 har, da det ligger på linjen. Men man indser nemt, at forholdet mellem afstandene til vinklens ben ikke kan være de samme for P_3 og Q. Dermed kan forholdet mellem afstandene til vinklens ben for P_3 og P_1 heller ikke være det samme. Detaljerne overlades til læseren.



□

Hjælpesætning 24 giver os umiddelbart nedenstående vigtige erkendelse:

Sætning 25

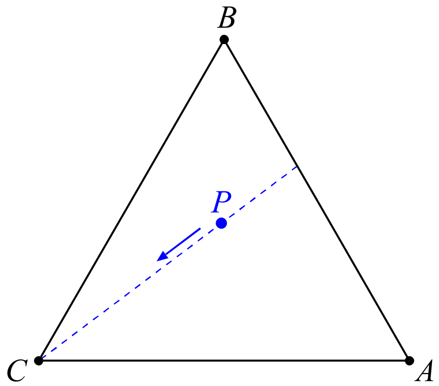
For to fordelingspunkter P_1 og P_2 i den ligesidede trekant gælder, at forholdet u/v for de to punkter er det samme hvis og kun hvis de to punkter ligger på samme linje gennem C. Der gælder tilsvarende udsagn for de øvrige to kombinationer: u/w og B samt v/w og A.

Bemærkning 26

Antag, at fordelingspunkterne kommer fra en stemmetalsfordeling (s_A, s_B, s_C). Så haves:

$$\frac{u}{v} = \frac{s_A/S}{s_B/S} = \frac{s_A}{s_B}$$

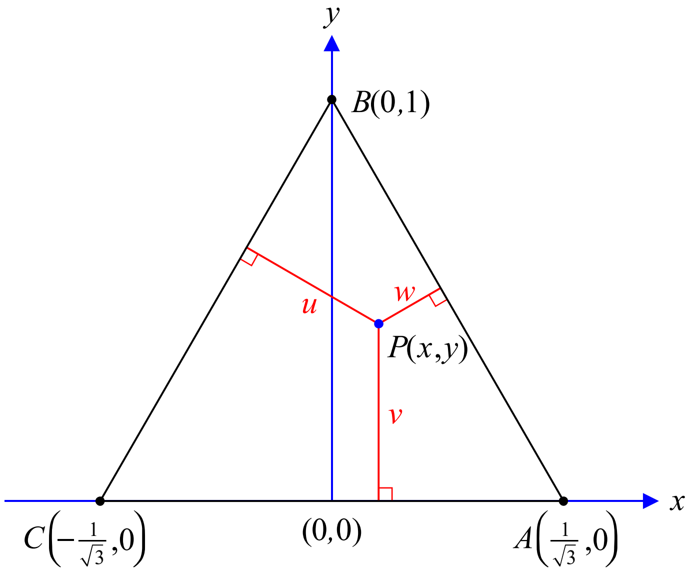
Har vi altså to situationer, hvor forholdene mellem stemmetallene for partierne A og B er de samme, så vil fordelingspunkterne ligger på samme linje gennem C og omvendt! Specielt gælder, at hvis vi for eksempel øger stemmetallet for partiet C, mens stemmetallene for partierne A og B holdes konstante, så vil fordelingspunktet bevæge sig ned mod C.



□

Det kan ofte være nyttigt at kunne omregne positionen af et punkt i den ligesidede trekant givet ved u, v og w til et punkt med rektangulære koordinater x, y i planen. Vi skal udlede formler for omregninger mellem disse to måder at angive et punkt P på. I udledningen af omregningsformlerne i sætning 27 nedenfor kan vi gøre det mere direkte på grund af vores tidligere omtalte valg af at lade den ligesidede trekant have højde 1, og ikke have en sidelængde på 1, som er valget i kilden [1]. Det betyder også forskelle i nogle af omregningsformlerne, selv om de begge især er korrekte på hver deres måde.

Udgangspunktet er som sagt en ligesidet trekant med højde 1. Vi lægger den ind i et retvinklet koordinatsystem, hvor x-aksen går gennem C og A med A på den positive del af x-aksen. Punktet (0,0) skal ligge på linjestykket mellem C og A, og y-aksen skal gå igennem origo og gå igennem B, så dette punkt ligger på den positive del af y-aksen. Situationen er vist på figuren herunder.



Sætning 27 (Omregningsformlerne)

Givet en ligesidet trekant med højden 1 eller 100%. Der gælder da følgende omregningsformler mellem koordinaterne u, v og w med betingelsen $u+v+w=1$ og de rektangulære koordinater x og y. Transformationerne hver vej er angivet.

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot(u-w) \qquad\qquad u = \tfrac{\sqrt{3}}{2}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}$$

$$y = v \qquad\qquad v = y$$

$$w = -\tfrac{\sqrt{3}}{2}x - \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2}$$

Bevis: Se opgave 28 herunder.

□

Opgave 28

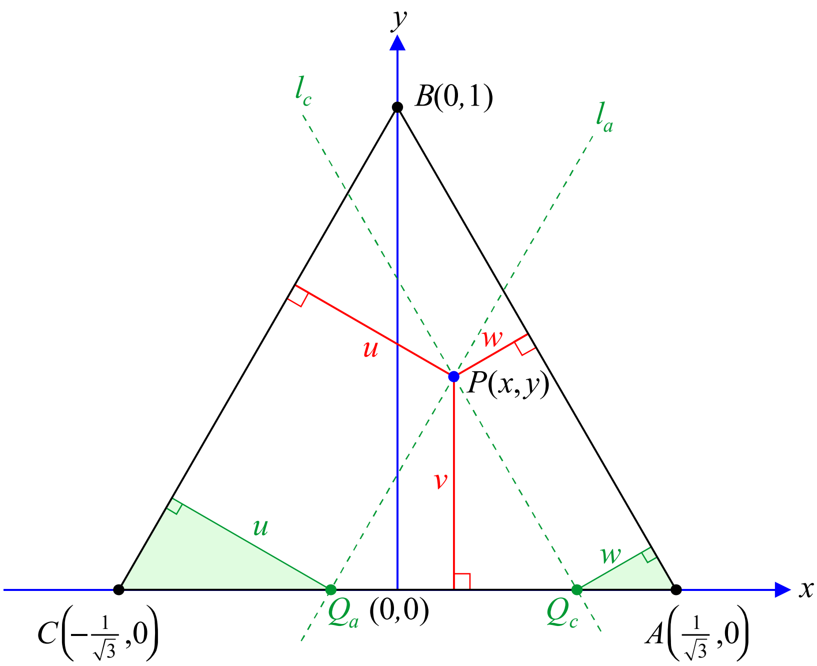
Bevis omregningsformlerne i sætning 27.

Hjælp: Antag først, at punktet P er angivet med koordinaterne (u,v,w). Den linje, der er parallel med siden a og som går igennem P, betegnes l_a. På samme måde betegnes den linje, som er parallel med siden c, med l_c. Linjerne er indtegnet på figuren nedenfor.

a) Benyt de grønne, retvinklede trekanter til at vise, at koordinaterne for skæringspunkterne mellem l_a og førsteaksen og l_c og førsteaksen er henholdsvis $Q_a(-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}u,0)$ og $Q_c(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{3}}w,0)$.

b) Opskriv parameterfremstillinger for linjerne l_a og l_c ved at udnytte de faste punkter Q_a og Q_c samt retningsvektorerne $\vec{r_a}=\overrightarrow{CB}$ og $\vec{r_c}=\overrightarrow{AB}$.

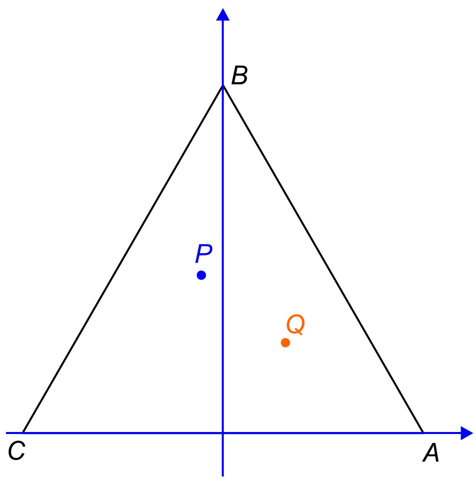
c) Bestem skæringspunktet mellem linjerne l_a og l_c. Vis, at det giver anledning til følgende formler: $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(u-w)$ og $y=v$.



d) For at få de modsatte formler for u, v og w givet x og y brug da dem fra c): Start med $x=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot(u-w)$. Indsæt $w=1-u-v$ og udskift v med y. Isoler derefter u i den fremkomne ligning, etc.

□

Eksempel 29



I eksempel 20 så vi, at stemmetallene 348, 723 og 520 for henholdsvis partierne A, B og C gav anledning til punktet P beskrevet ved:

$$u=0{,}219 \quad v=0{,}454 \quad w=0{,}327$$

i den ligesidede trekant. De rektangulære koordinater til P kan beregnes via omregningsformlerne i sætning 27:

$$x=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot(u-w)=\tfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot(0{,}219-0{,}327)=-0{,}0624$$
$$y=v=0{,}454$$

Punktet P er afbildet på figuren. Lad os omvendt sige, at vi har et punkt Q med de rektangulære koordinater $(0{,}18;0{,}26)$. Hvilke procentvise stemmetal repræsenterer punktet Q for de tre partier A, B og C? Vi kan nemt besvare spørgsmålet ved at bruge de andre omregningsformler i sætning 27:

$$u \;=\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}x-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2} \;=\; \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}18-\tfrac{1}{2}\cdot 0{,}26+\tfrac{1}{2} \;=\; 0{,}526$$
$$v=y=0{,}260$$
$$w=-\tfrac{\sqrt{3}}{2}x-\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}=0{,}214$$

hvilket svarer til 52,6% af stemmerne til partiet A, 26,0% til B og 21,6% til C. □

Opgave 30

Stemmefordelingen for tre partier er følgende: A: 381, B: 1023, C: 656.

a) Bestem ved hjælp af definition 19 værdierne u, v og w for det punkt P, som svarer til stemmefordelingen.

b) Benyt omregningsformlerne i sætning 27 til at beregne de rektangulære koordinater (x, y) for punktet P.

Opgave 31

En stemmefordeling er repræsenteret af punktet P med koordinater $(x, y) = (0{,}27;\ 0{,}40)$ i den ligesidede trekant ABC. Benyt omregningsformlerne til at udregne hvilke procentvise stemmetal, det svarer til for partierne A, B og C.

Opgave 32

Bevis sætning 25 ved hjælp af omregningsformlerne i sætning 27.

Hjælp: Parameterfremstillingen for den rette linje, som går igennem $C(-1/\sqrt{3}\,, 0)$ og har retningsvektor $\vec{r} = (r_x, r_y)$ kan skrives således

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} + t \cdot r_x \\ t \cdot r_y \end{pmatrix}$$

Vis, ved at bruge omregningsformlerne, at brøken $\frac{u}{v}$ er uafhængig af t.

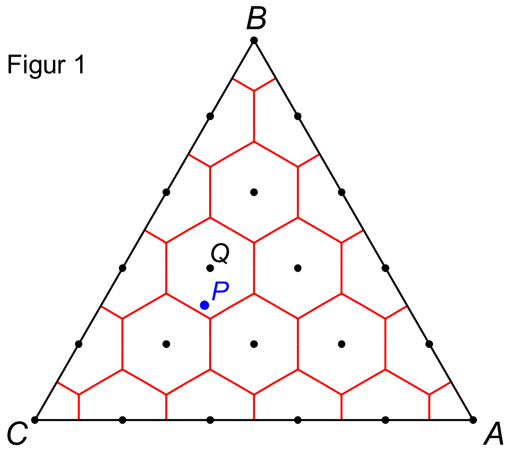
□

Vi er nu klar til at inddrage de forskellige mandatfordelingers karakteristika i trekanterne med henblik på at kunne afgøre, hvilken mandatfordeling et givet stemmeresultat fører til, når vi bruger den pågældende metode. Igen ser vi naturligvis kun på tilfældet med 3 partier. Det viser sig, at i tilfældet med største brøks metode (SBM) er der kommer et bikube-lignende gitter i spil.

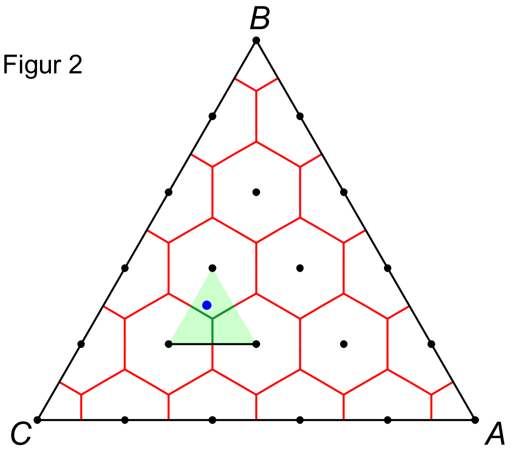
Eksempel 33 (Største brøks metode)

Vi har 5 mandater, som skal fordeles mellem 3 partier, som under et valg fik følgende stemmetal: A: 278, B: 356 og C:544. Det giver anledning til et stemmetalspunkt P (se hvordan i eksempel 29). De mulige mandatfordelingspunkter er også indtegnet i trekanten. Lad os nu sige, at vi ønsker at bruge største brøks metode. Hvilken mandatfordeling fås da? Ja, hvis vi et øjeblik accepterer bikube-gitteret, så er sagen enkel: Stemmetalspunktet P ligger i den celle, hvor mandatpunktet Q ligger, som vist på figur 1. Punktet Q repræsenterer mandatfordelingen 1-2-2 til partierne A, B og C. Så det er resultatet.

Figur 1

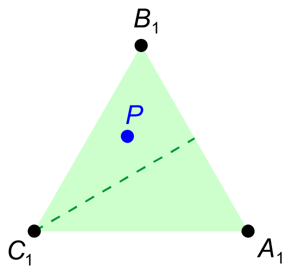


Figur 2

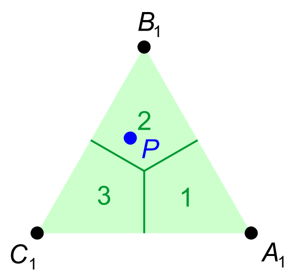


Vi kunne selvfølgelig også have udregnet mandattallene lige som i eksempel 11. Det er vist i skemaet nedenfor. Først får hvert parti et mandattal svarende til heltalsdelen af deres kvotaer. Det giver 1-1-2 for de tre partier. Det sidste mandat går til partiet, der har den største brøkdel i kvotaen. Der er partiet B, som markeret med fed rød i skemaet.

Største brøks metode					
Parti	Stemmer	Kvota	Heltal	Brøk	Antal
A	278	1,180	1	0,180	**1**
B	356	1,511	1	**0,511**	**2**
C	544	2,309	2	0,309	**2**



Men hvorfra kommer bikube-gitteret? For at forstå det, kigger vi på den lille grønne trekant i figur 2 på forrige side. Den er fremhævet på figuren til højre. Midtnormalen til linjestykket A_1B_1 er indtegnet som en stiplet linje. Alle punkter på midtnormalen ligger lige langt fra siderne A_1C_1 og B_1C_1. Disse punkter repræsenterer situationer, hvor partierne A og B har samme brøkdel i kvotaen. Derimod vil punktet P, som ligger over midtnormalen repræsentere en situation, hvor partiet B har en større brøkdel i kvotaen end A har. På lignende måde kan man tegne midtnormaler til linjestykkerne A_1C_1 og B_1C_1 og argumentere på lignende måde for dem. Stykker man dem sammen, ender man – som vist på figuren til højre – med tre områder 1, 2 og 3, hvori man kan sige, at for punkter i område 1 vil partiet A have den største brøkdel i kvotaen, i område 2 vil B have den største brøkdel i kvotaen, og i område 3 vil C have den største brøkdel i kvotaen. Punktet P ligger i område 2. Derfor får partiet B det sidste mandat, som skal uddeles! Når man stykker den inddeling med midtnormaler sammen for hver enkelt trekant, så får man bikube-gitteret.



□

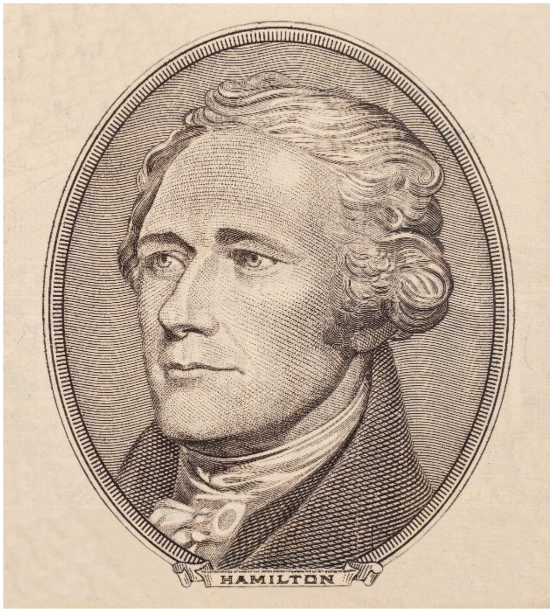
Opgave 34 (Største brøks metode)

I alt 6 mandater skal fordeles mellem de tre partier A, B og C, som ved et valg modtog henholdsvis 832, 290 og 375 stemmer. Største brøks metode ønskes anvendt.

a) Benyt formlerne i Definition 19 til at bestemme koordinaterne u, v og w til det fordelingspunkt P, som hører til stemmefordelingen.
b) Omregn til (x, y)-koordinater for punktet P ved at benytte formlerne i sætning 27.
c) Afsæt punktet fra b) i bilaget med trekanten side 32. Hvilket mandatpunkt ligger i samme celle som P? Det mandatpunkt afgør mandatfordelingen.
d) Udregn kvotaer, heltalsværdier og brøkdele for de tre partier og indskriv dem i en tabel ligesom den i eksempel 33. Hvilken mandatfordeling ender det med? Passer det med, hvad du fandt ud af i underspørgsmål c)?

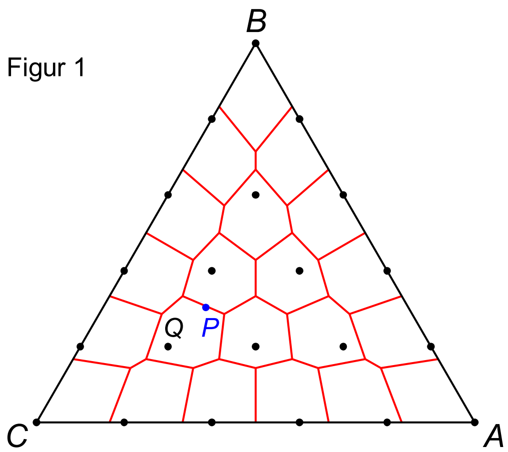
Alexander Hamilton (1757–1804) var en amerikansk militærofficer, politiker, skribent og en af den unge republiks dygtigste jurister. Han var desuden en vigtig figur i tilblivelsen af den amerikanske forfatning. Hamilton blev USA's første finansminister, under præsident George Washington.

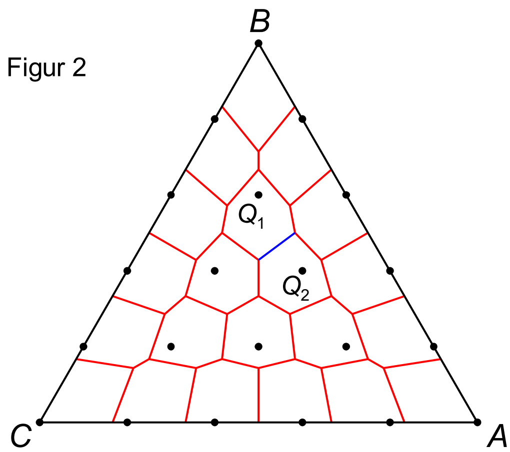
I 1792 foreslog Hamilton den mandatfordelingsmetode, som er den samme som den, vi ovenfor kalder *største brøks metode*. Derfor går denne metode også under navnet *Hamiltons metode*.



Eksempel 35 (D'Hondts metode)

Vi skal studere den samme situation som i eksempel 33, dvs. et valg hvor de tre partier A, B og C fik henholdsvis 278, 356 og 544 stemmer, og hvor der skal uddeles 5 mandater. Forskellen er bare, at mandatfordelingen skal udregnes via D'Hondts metode denne gang. Hvilket gitter i trekanten giver det anledning til? I første omgang vil vi uden forklaring antage, at vi har gitteret til rådighed. Til slut vil vi antyde, hvordan gitteret er blevet til.





Stemmetalspunktet P ligger nøjagtigt det samme sted i trekanten, som var tilfældet i eksempel 32. Gitteret er blot anderledes. På figur 1 ser vi, at P lige nøjagtigt ligger indenfor den celle, som hører til mandatpunktet Q. Det giver altså en mandatfordeling på 1-1-3 for partierne A, B og C. Altså et andet resultat end største brøks metode giver! Vi kunne selvfølgelig også have udregnet mandatfordelingen i et skema:

D'Hondts metode			Divisorer				
Parti	Stemmer	1	2	3	4	5	Antal
A	278	**278**	139	92	69	55	**1**
B	356	**356**	178	118	89	71	**1**
C	544	**544**	**272**	**181**	136	108	**3**

De kvotienter, som giver anledning til et mandat er fremhævet med fed rød. Vi bemærker også, at partiet B var meget tæt på at vinde det sidste mandat, da 178 er meget tæt på 181, som resulterede i et mandat for partiet C. Det stemmer fint med, at punktet P ligger tæt på cellens grænser. I øvrigt bekræfter eksemplet den påstand, at D'Hondts metode har en tendens til at favorisere de store partier!

Men hvordan blev gitteret for D'Hondts metode til? Vi skal nøjes med at forklare et enkelt linjestykke i gitteret, nemlig det blå linjestykke, som ses på figur 2. De øvrige behandles på analog vis. Punkter på det blå linjestykke repræsenterer et grænsetilfælde, hvor der er en *uafgjort* situation mellem partierne A og B. Man kan altså ikke afgøre, om det ender med mandatfordelingspunktet Q_1 eller mandatfordelingspunktet Q_2, altså om parti A får det sidste mandat eller B får det. Hvad vi ser er, at parti A allerede har 1 mandat, B allerede har 2 mandater, mens C har 1 mandat. Dette er vist i divisionsskemaet herunder.

D'Hondts metode			Divisorer				
Parti	Fordeling	1	2	3	4	5	6
A	*a*	***a***	*a*/2	*a*/3	*a*/4	*a*/5	*a*/6
B	*b*	***b***	***b*/2**	*b*/3	*b*/4	*b*/5	*b*/6
C	*c*	***c***	*c*/2	*c*/3	*c*/4	*c*/5	*c*/6

Vi tænker os størrelserne a, b og c, som repræsenterer en fordeling for partierne A, B og C. Det behøver i princippet ikke være hele tal, som det ville være med en stemmetalsfordeling. Men hvad skal der gælde af relationer mellem a, b og c, for at vi har den beskrevne situation? Ja for det første skal de to kvotienter, som er markeret med gult, være ens. Det giver følgende:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = k \quad \Leftrightarrow \quad a = 2k \ \wedge \ b = 3k$$

hvor vi har kaldt kvotienten for k. Men der skal mere til: k må ikke være større end c, da partiet C allerede har fået et mandat for kvotienten c. På tilsvarende måde må skal k være større end $c/2$, da sidstnævnte ikke kommer i spil til et mandat. Det giver

$$\frac{c}{2} < k < c \quad \Leftrightarrow \quad k < c < 2k$$

Der er altså et lille spillerum for, hvad c kan være. Lad os sætte $t = c/k \Leftrightarrow c = k \cdot t$, hvorved $1 < t < 2$. Vi har altså et fordelingspunkt på formen $(2k, 3k, t \cdot k)$, som ifølge definition 19 giver anledning til følgende værdier for u, v og w:

$$u = \frac{2k}{2k + 3k + t \cdot k} = \frac{2}{5+t}$$
$$v = \frac{3k}{2k + 3k + t \cdot k} = \frac{3}{5+t}$$
$$w = \frac{k \cdot t}{2k + 3k + t \cdot k} = \frac{t}{5+t}$$

Da $u/v = 2/3$ er konstant, har vi ifølge sætning 25 og bemærkning 26, at fordelingspunkterne vil ligge på en ret linje gående igennem C. Der fås et linjestykke, når t varieres fra 1 til 2. Dets endepunkter fås ved at indsætte henholdsvis $t = 1$ og $t = 2$. Det giver henholdsvis $(u, v, w) = (\frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{1}{6})$ og $(u, v, w) = (\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7})$. Ved at bruge omregningsformlerne fra sætning 27 giver det følgende rektangulære koordinater for linjestykkets endepunkter:

$$x = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u - w) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\tfrac{2}{6} - \tfrac{1}{6}) = 0{,}0962$$
$$y = v = \tfrac{3}{6} = 0{,}50$$

henholdsvis

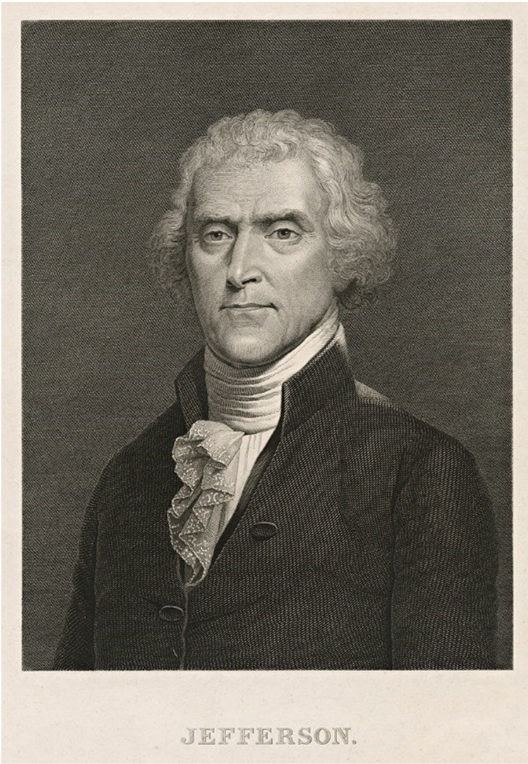
$$x = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (u - w) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\tfrac{2}{7} - \tfrac{0}{7}) = 0$$
$$y = v = \tfrac{3}{7} = 0{,}4286$$

På lignende måde fås alle de øvrige linjestykker i gitteret.

□

Victor D'Hondt (1841–1901) var en belgisk advokat og professor i jura ved Universitetet i Gent. I 1878 foreslog han den mandatfordelingsmetode, som i dag bliver betegnet D'Hondts metode.

Faktisk var metoden allerede foreslået af den 3. amerikanske præsident Thomas Jefferson (1743–1826). Han var en visionær mand og en repræsentant for oplysningstidens dannelsesideal: Som opfinder, landmand, musiker og videnskabsmand var han med til at skrive uafhængighedserklæringen. Jefferson formulerede mandatfordelingsmetoden metoden lidt anderledes end D'Hondt, nemlig som en *mandatprismetode*. Det kan dog vises, at de to metoder er ækvivalente, dvs. fører til samme mandattal.



Jeffersons metode blev anvendt fra 1791 efter at George Washington havde nedlagt veto mod Hamiltons metode. Jefferson havde dog også en lille bagtanke. Hans metode favoriserer store stater en smule, og han kom selv fra en sådan.

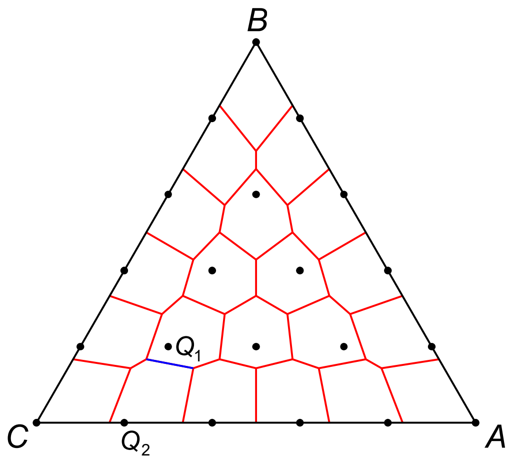
Opgave 36 (D'Hondts metode)

I alt 6 mandater skal fordeles mellem de tre partier A, B og C, som ved et valg modtog henholdsvis 832, 290 og 375 stemmer, præcis som i opgave 34. Denne gang ønskes dog D'Hondts metode anvendt ved mandatfordelingen. Hvis du allerede har løst opgave 34, så kan du springe delspørgsmålene a) og b) over herunder, da resultaterne herfra er identiske med dem fra opgave 34 – de er uafhængige af mandatfordelingsmetoden!

a) Benyt formlerne i Definition 19 til at bestemme koordinaterne u, v og w til det fordelingspunkt P, som hører til stemmefordelingen.
b) Omregn til (x, y)-koordinater for punktet P ved at benytte formlerne i sætning 27.
c) Afsæt punktet fra b) i bilaget med trekanten side 33. Hvilket mandatpunkt ligger i samme celle som P? Giver det samme mandatfordeling som tilfældet var med største brøks metode i opgave 34?
d) Lav et divisorskema ligesom i eksempel 35. Passer den mandatfordeling, du udregner herved, med den fra c)?

Opgave 37 (Sværere)

I sidste del af eksempel 35 udregnede vi endepunkterne for et linjestykke i mandatgitteret for D'Hondts metode. Denne gang ønskes de rektangulære koordinater for endepunkterne for det blå linjestykke mellem de to mandatpunkter Q_1 og Q_2 udregnet, som vist på figuren til højre.

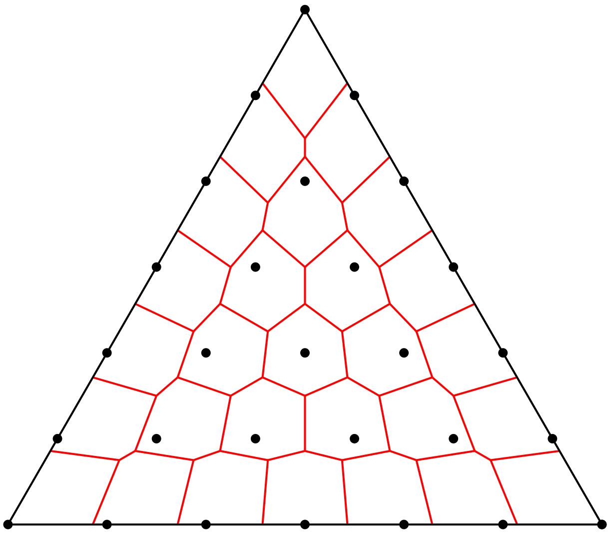


□

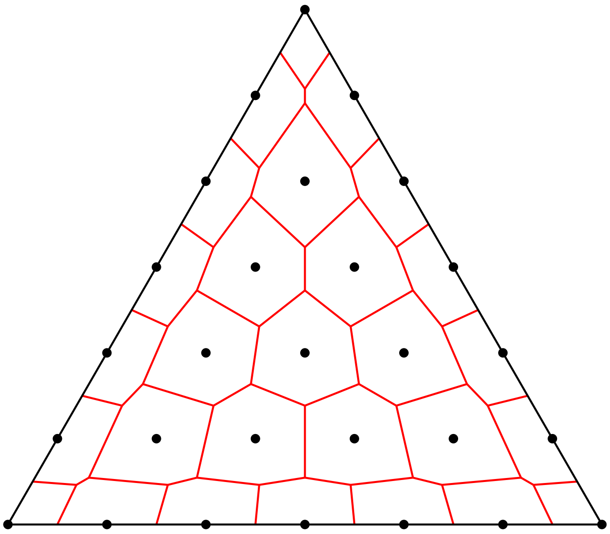
Som bekendt er D'Hondts metode en *divisormetode* (divisorer: 1, 2, 3, …). I eksempel 11 betragtede vi desuden de to divisormetoder med navnene Sainte-Laguës metode og den modificerede Sainte-Laguës metode. Førstnævnte har de ulige divisorer 1, 3, 5, …, mens man i sidstnævnte har udskiftet 1 med 1,4. Endelig behandlede vi i eksempel 11 endnu en divisor metode, nemlig Lige Store Forholds metode, hvor den n'te divisor er givet ved det geometriske middeltal mellem n og n–1, som er $\sqrt{n\cdot(n-1)}$. På næste side er vist mandatgitrene for de fire nævnte divisormetoder i tilfældet med 6 mandater. Bemærk, at den første divisor for Lige Store Forholds metode er $\sqrt{1\cdot(1-0)}=0$, hvilket kan tolkes som en uendelig kvotient, hvilket betyder, at alle partier forlods har fået tildelt 1 mandat. Derfor er de yderste mandatpunkter i trekanten ikke mulige. Af den grund er de vist med en åben cirkel i modsætning til en udfyldt cirkel.

Mandatgitter for 6 mandater

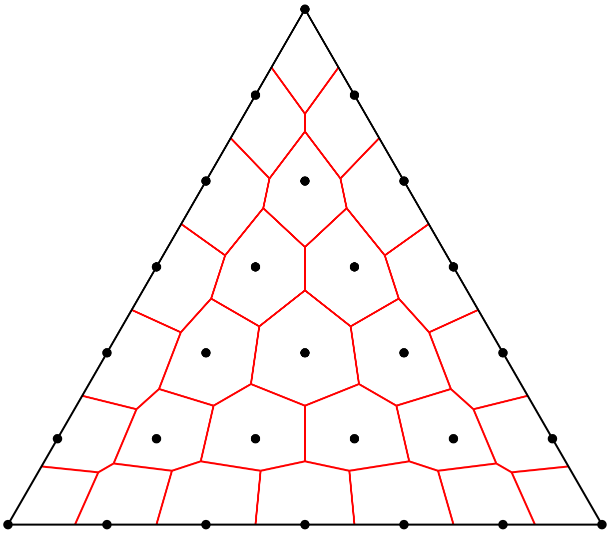
- for fire divisormetoder



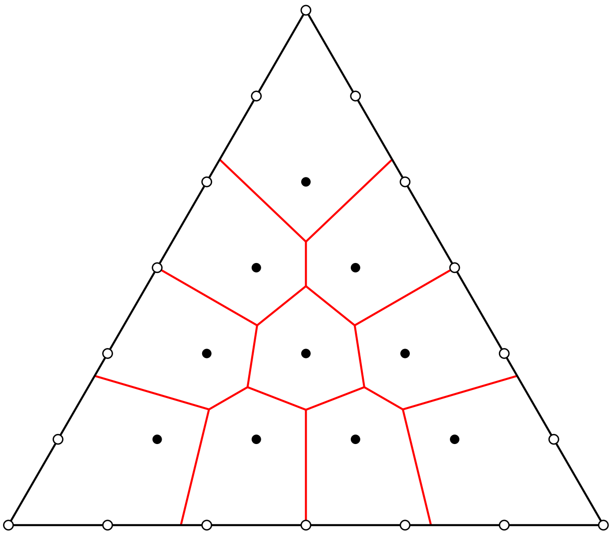
D'Hondts metode



Sainte-Laguës metode



Saint-Laguës modificeret



Lige store forholds metode

Paradokser

Vi skal nu kigge på et par mærkelige og uhensigtsmæssige egenskaber for største brøks metode. Det første er *Alabama-paradokset*. Det andet er en uhensigtsmæssighed, som betegnes *monotoniparadokset*.

Alabama-paradokset

Som navnet kan antyde, er der tale om et paradoks, som faktisk er blevet registreret i praksis i amerikansk politik. Det var i 1880 i USA. Her skal vi først lige forstå, at Repræsentanternes Hus (RP) – den gang som i dag – har et bestemt antal sæder, som er blevet vedtaget på forhånd. Heraf skal hver stat have et antal sæder, som afhænger af befolkningstallet i den pågældende stat. Indbyggertallet i de enkelte stater måles i en folketælling hvert 10 år i USA. Herefter bruges indbyggertallet som et slags stemmetal for staten! Dengang i 1880 var der 38 stater i USA. Man brugte største brøks metode til at beregne, hvor mange sæder hver enkelt stat skulle have i RP. Imidlertid var det samlede antal sæder i RP ikke fastlagt i forfatningen. Det var blevet øget igennem tiden efter at flere stater var kom til. Så spørgsmålet var, hvor mange sæder, man skulle vedtage, at RP skulle have i 1880? Her blev det opdaget, at hvis man valgte 300 sæder i stedet for 299 sæder, så ville staten Alabama få et sæde mindre! Det ville have betydet, at Texas og Illinois ville have fået et ekstra sæde, men Alabama et mindre. Det virker helt uretfærdigt, for hvis der er flere sæder at dele ud af, så kan man ende med at få færre sæder. Det gav anledning til stor opstandelse, og staten protesterede kraftigt. Man endte så faktisk med, at der skulle være 325 sæder, så der ikke umiddelbart opstod problemer af den nævnte art.

I 1901 var der ballade igen i valgkomitéen (Select Committee). Situationen er omtalt på min hjemmeside (se [L1]). Her var det blandt andet staten Maine, det kunne gå ud over.

Eksempel 38 (Alabama-paradokset)

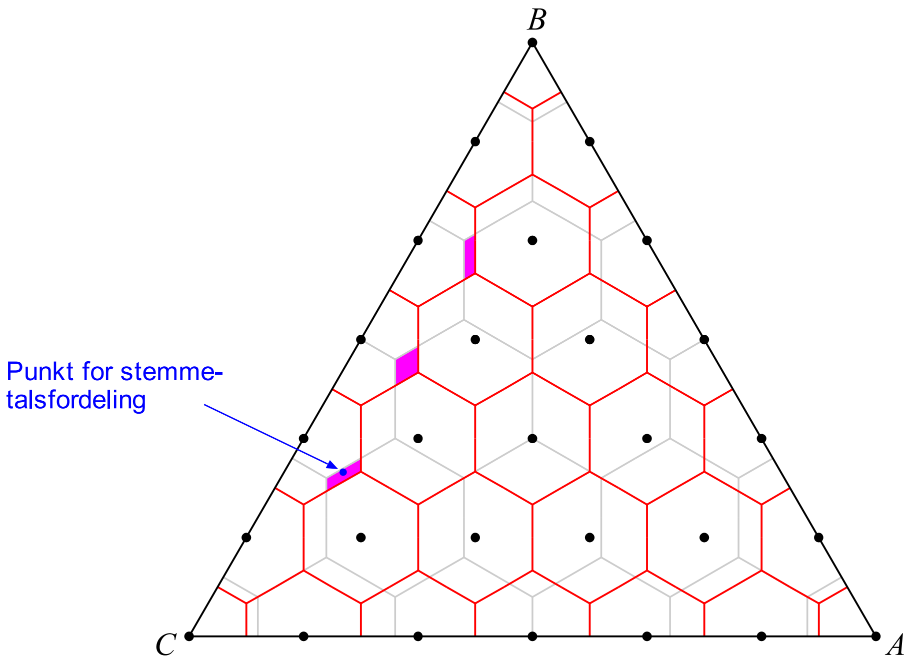
Det er faktisk ikke svært at konstruere eksempler hvor Alabama-paradokset opstår. I dette eksempel ser vi på tre partier *A*, *B* og *C*, hvor stemmetallene er henholdsvis 55, 177 og 408. Hvis vi bruger største brøks metode i tilfældet med 5 og 6 mandater, opdager man noget ejendommeligt: Hvis der uddeles 5 mandater, får partiet *A* ét af dem, men uddeles der 6 mandater, så får partiet ingen mandater!

5 mandater					
Største brøks metode					
Parti	Stemmer	Kvota	Heltal	Brøk	Antal
A	55	0,43	0	**0,43**	**1**
B	177	1,38	1	0,38	**1**
C	408	3,19	3	0,19	**3**

6 mandater					
Største brøks metode					
Parti	Stemmer	Kvota	Heltal	Brøk	Antal
A	55	0,52	0	0,52	**0**
B	177	1,66	1	**0,66**	**2**
C	408	3,83	3	**0,83**	**4**

Vi ser, at det handler om at partiet A ikke længere får den største brøkdel, når mandattallet vokser fra 5 til 6. Det gør partierne *B* og *C* derimod. Se brøkdele markeret med rødt.

Man kan også prøve at forstå paradokset ved at kigge på den ligesidede trekant for de tre partier. På figuren er indtegnet mandatgitteret for største brøks metode for 6 mandater.



Bag det røde gitter er imidlertid også med svag grå farve indtegnet gitteret for tilfældet med 5 mandater. Det betyder, at vi kan lokalisere tre små områder ovre i venstre side af trekanten, hvor Alabama-paradokset opstår. Områderne er farvet pink. Der er tilsvarende områder langs de andre sider af trekanten. Stemmetal, hvis fordelingspunkter lander i et af de nævnte områder vil altså føre til Alabama-paradokset. Det konkrete tilfælde ovenfor har det blå fordelingspunkt, udpeget med en pil på figuren.

□

Opgave 39 (Alabama-paradokset)

Ved et valg, hvor der indgår tre partier, får partierne følgende stemmetal: A: 674, B: 651 og C: 130. Største brøks metode ønskes brugt ved mandatfordelingen.

a) Vis – ved at udfylde skemaer ligesom i eksempel 38 – at Alabama-paradokset opstår, hvis man går fra 5 til 6 mandater.

b) Benyt definition 19 og omregningsformlerne i sætning 27 til at bestemme (x, y)-koordinaterne til fordelingspunktet.

c) Afsæt punktet fra b) i trekanten i bilaget til opgave 39 side 34. Overvej hvorfor Alabama-paradokset opstår set ud fra et geometrisk synspunkt ved at kigge på de overlejrede gitre for mandatfordelingerne for henholdsvis 6 og 5 mandater.

Opgave 40 (Alabama-paradokset i 1901 i valgkomitéen i USA)

I denne opgave skal du undersøge situationen fra 1901, hvor der i valgkomitéen i USA opstod en ophedet debat om antallet af sæder i Repræsentanternes. Igen var det største brøks metode og Alabama-paradokset, som kom i spil. Man kan læse om hændelsen på min hjemmeside (se [L1]). Download fra siden den zip-fil med Excelfiler, som findes under overskriften *Mandatfordelingsberegninger i Repræsentanternes Hus i USA efter folketællingerne i årene 1880, 1900, 2000 og 2020*. Pak arkivet ud og åben filen med navnet *Mandatfordelinger i Repræsentanternes Hus_folketælling 1900*.

a) Sæt mandattallet til 356 og konstatér, at hvis man øger mandattallet til 357, så taber staten *Colorado* et mandat (Bemærk, at man i filen, som er en Excel-makro, kan gemme resultatet fra et mandattal, øge mandattallet med 1 og så se forskellen).

b) Sæt nu mandattallet i samme fil til 385 og konstatér, at hvis man øger mandattallet fra 385 til 386, så taber staten *Maine* et mandat.

Det endte godt nok med, at man satte antallet af sæder til 386, men samtidigt endte man med at forlade største brøks metode for altid og gå over til Websters metode, som er ækvivalent med Sainte-Laguës metode. Denne metode blev anvendt fra 1901 til 1940.

Opgave 41 (Sværere)

Overvej, hvordan du – uden at prøve dig frem – kan konstruere et eksempel, hvor Alabama-paradokset opstår i tilfældet med 3 partier, og man går fra 5 til 6 mandater. *Hjælp*: Kig på bilaget til opgave 39 og regne baglæns via sætning 27, etc.

Sætning 42

Alabama-paradokset kan ikke forekomme for en divisormetode.

Bevis: Dette ses nemt ud fra den måde mandaterne udvælges på: Man vælger de M største kvotienter i divisorskemaet. Skal der vælges et ekstra mandat, vil man blot give det til det parti, som har den kvotient, som endnu ikke har resulteret i et mandat. Så der bliver ikke taget et mandat fra nogen.

□

Bemærkning 43

Det skal bemærkes, at de ting, vi har foretaget med de ligesidede trekanter, kun giver mening for mandatfordelinger, som opfylder princip 13 nævnt i [1]: *Proportionale stemmefordelinger skal give samme mandatfordeling*. Proportionale stemmetal vil nemlig give samme fordelingspunkt i den ligesidede trekant. Informationen om de eksakte stemmetal er gået tabt i afbildningen, kun de indbyrdes forhold er repræsenteret. Heldigvis har alle de betragtede mandatfordelingsmetoder denne egenskab.

□

Vi er nu kommet til det såkaldte *Monotoni-paradoks*, som er omtalt i bogen [1]. Det er bedst illustreret gennem et eksempel.

Eksempel 44 (Monotoni-paradokset)

Tre partier har ved et valg opnået følgende stemmetal: A: 208, B: 625 og C: 1567. Største brøks metode er anvendt ved mandatfordelingen af de i alt 5 mandater. Ved et nyt valg et par år senere er stemmetallene: A: 220, B: 598 og C: 963. Det virker her meget forbløffende, at selv om partiet A stemmemæssigt er gået frem, og B og C begge stemmemæssigt er gået tilbage i forhold til sidste valg, så mister A faktisk et mandat!

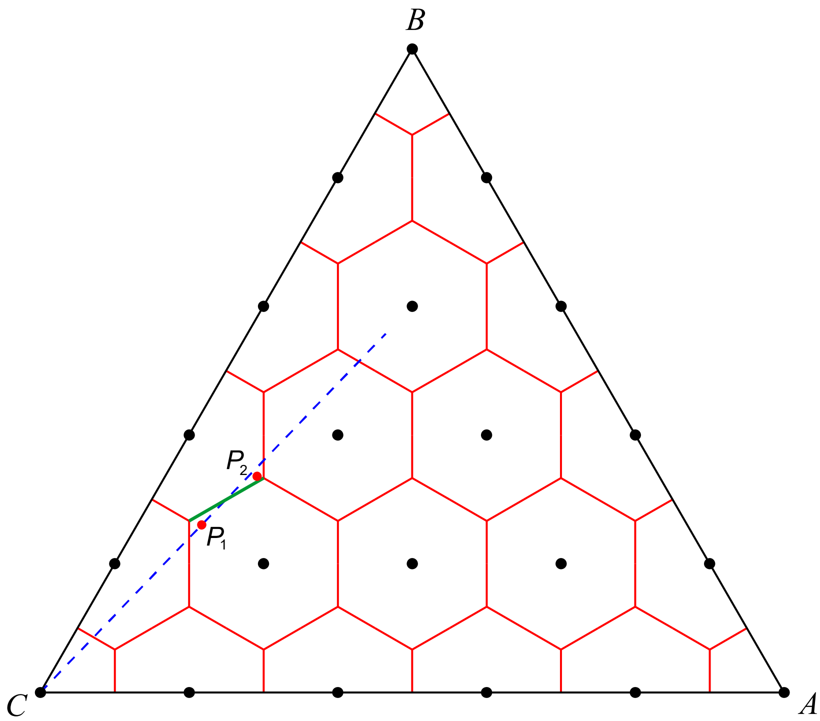
Største brøks metode					
Parti	Stemmer	Kvota	Heltal	Brøk	Antal
A	208	0,43	0	**0,43**	**1**
B	625	1,30	1	0,30	**1**
C	1567	3,26	3	0,26	**3**
Sum:	2400				

Største brøks metode					
Parti	Stemmer	Kvota	Heltal	Brøk	Antal
A	220	0,62	0	0,62	**0**
B	598	1,68	1	**0,68**	**2**
C	963	2,70	2	**0,70**	**3**
Sum:	1781				

Igen kan modellen med den ligesidede trekant bruges til at give et indblik i den mekanisme, der gør ovenstående muligt, altså at:

$$s_{A,2} > s_{A,1},\ s_{B,2} < s_{B,1},\ s_{C,2} < s_{C,1} \text{ og } m_{A,2} < m_{A,1}.$$

hvor indeks 1 hentyder til den første valg og indeks 2 til det senere valg. Grundidéen til at konstruere et eksempel med den pågældende egenskab er at anvende egenskaben nævnt i bemærkning 26 tidligere: Hvis stemmetallene for *B* og *C* holdes konstante, mens stemmetallet for *C* øges, så vil punktet i den ligesidede trekant bevæge sig på en linje gennem *C* ned mod punktet *C*. Man tegner nu en halvlinje fra *C* (se stiplet linje) sådan, at den snævert skærer igennem en væg mellem to celler i mandatgitteret for største brøks metode for 5 mandater. På figuren er væggen farvet grøn. Det gælder nu om at vælge to punkter P_1 og P_2 tæt på linjen, men så de ligger på hver sin side af den grønne væg. Processen er en smule teknisk og den forklares under figuren.



Aflæs eller beregn (x,y)-koordinaterne til det valgte første punkt P_1. Det kan eventuelt være: $(x,y)=(-0{,}3270;\,0{,}2603)$. Via omregningsformlerne i sætning 27 oversættes til følgende: $(u,v,w)=(0{,}08666;\,0{,}26030;\,0{,}65304)$. Husk at dette kun er andele, så vi ganger med et eller andet næsten vilkårligt stort tal (må gerne være et tal, som ikke er helt), så man får noget, som kan ligne stemmetal. Vi vælger at gange med 2400 og får følgende: $2400\cdot(u,v,w)=(207{,}98;\,624{,}72;\,1567{,}30)$. Herefter runder vi af til hele tal: 208, 625 og 1567. Dette skal være vores stemmetal for henholdsvis *A*, *B* og *C*. Da vi har rundet af, genberegner vi tingene: (x,y)-koordinaterne til fordelingspunktet $(208,625,1567)$ beregnes og placeringen for punktet P_1 i trekanten korrigeres derefter. Det er kun marginalt. Nu gør vi noget tilsvarende med vores valg af punkt P_2: (x,y)-koordinaterne omregnes til (u,v,w)-koordinater. Dette ganges med et tal *k*, så $k\cdot u$ kommer til at være meget tæt på 208 fra før. På grund af valget af punktet tæt på den stiplede linje, vil det automatisk betyde, at de første to koordinater i $k\cdot(u,v,w)$ er meget tætte på 208 og 625, hvorimod den tredje koordinat er betydelig mindre. Endelig justerer vi stemmetallene en smule: Vi øger A en smule til 220 og mindsker B en smule til 598, og runder værdien for $k \cdot w$ af til 963. Det giver fordelingspunktet $(220, 598, 963)$. Bemærk, at man kan vælge sine justeringer så små, at (x, y)-koordinaterne for det justerede punkt P_2 stadig kommer til at ligge i den ønskede celle i mandatgitteret.

□

Opgave 45 (Monotoniparadokset)

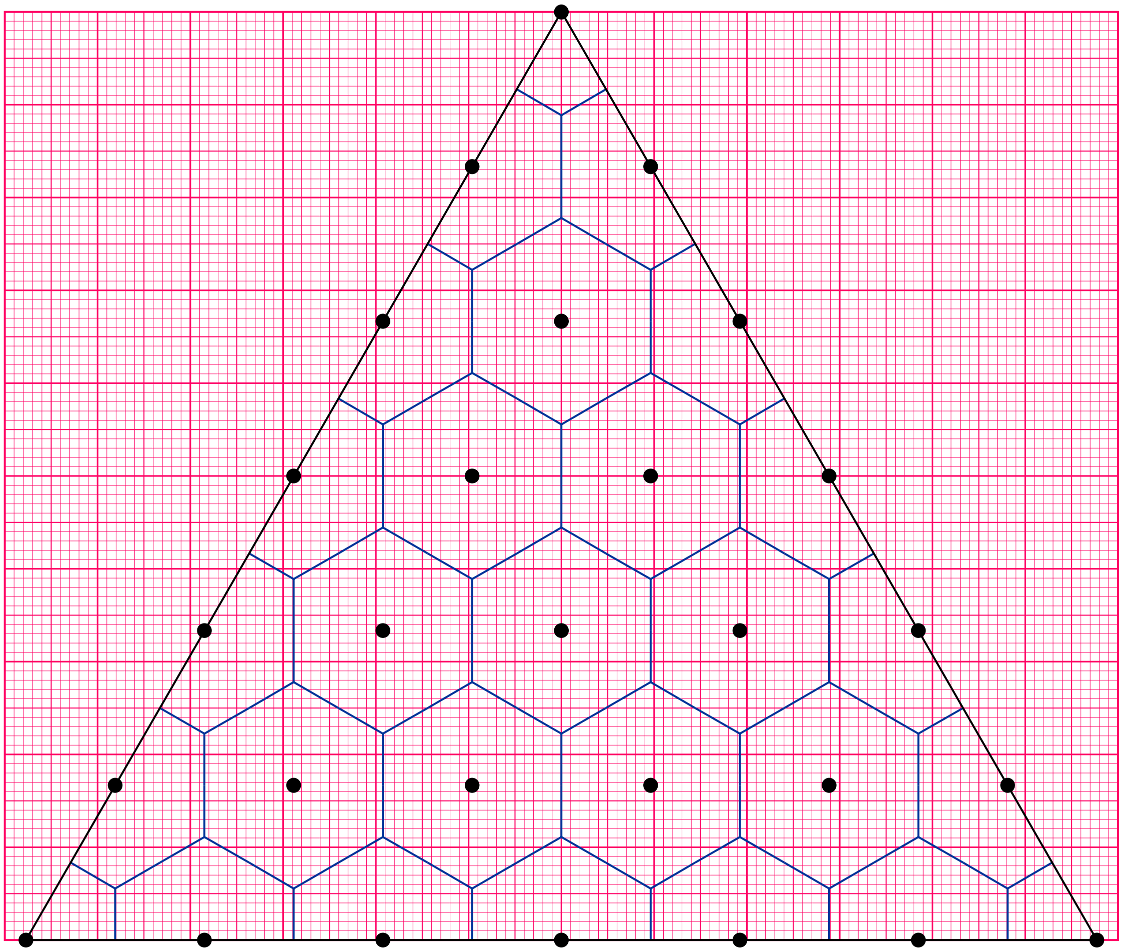
Tre partier har ved et valg opnået følgende stemmetal: A: 700, B: 693 og C: 418. Ved et senere valg er stemmetallene: A: 695, B: 447 og C: 424. Største brøks metode benyttes i fordelingen af i alt 6 mandater.

a) Lav et skema som i eksempel 44 for begge valg. Hvor mange mandater får partierne i hvert af valgene?
b) Registrer at monotoniparadokset er i spil: Hvilke partier er gået tilbage og hvilke frem. Hvilket parti har mistet et mandat?
c) Afsæt fordelingspunkterne for de to valg som to punkter i den ligesidede trekant i bilaget side 35. *Hjælp*: Du får brug for både at bruge definition 19 og omregningsformlerne i sætning 27. Ligger punkterne omtrent på en halvlinje gennem et af hjørnerne i trekanten?

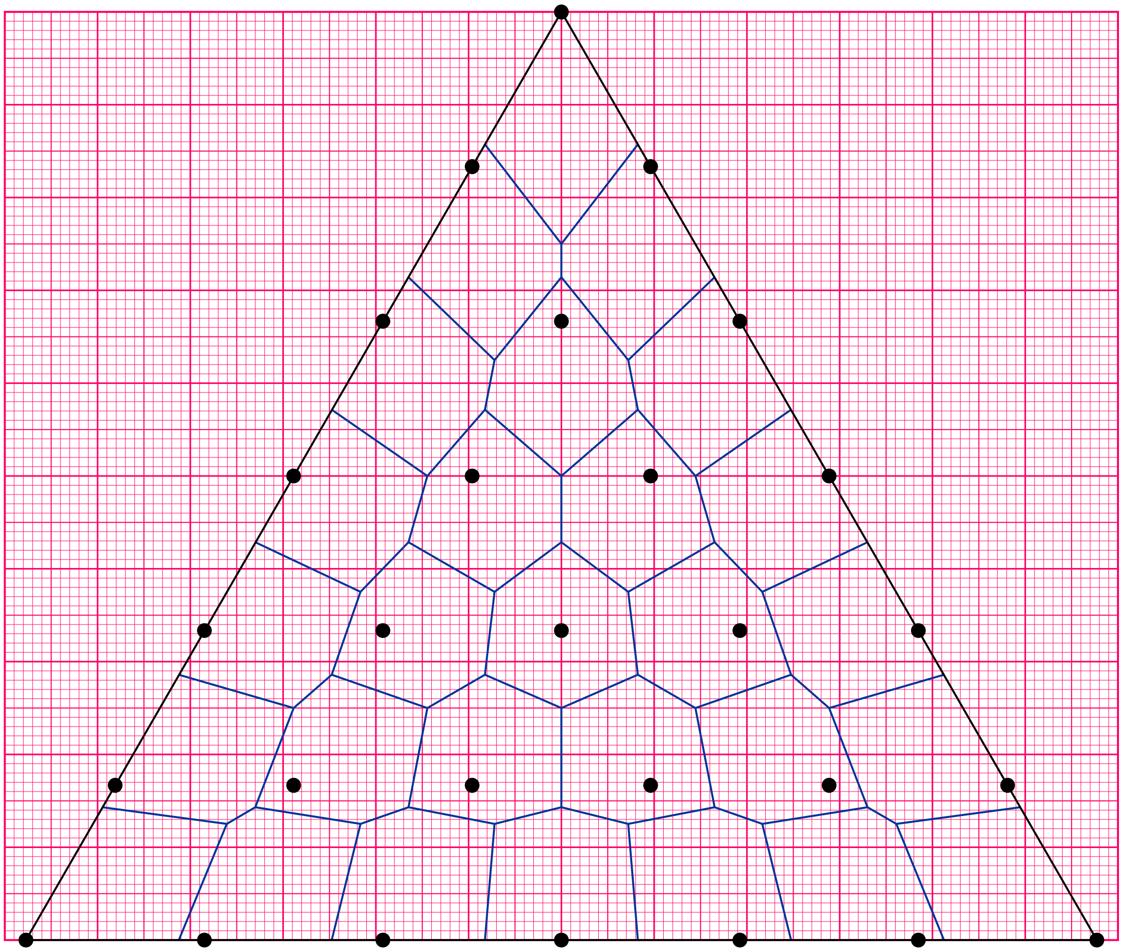
Bemærkning 46

Monotoniparadokset som beskrevet ovenfor kan ikke foregå, hvis mandatfordelingsmetoden er en divisormetode. Det overlades til læseren at overbevise sig om dette: Tænk på kvotienterne for stemmetallene, hvis $s_{A,2} > s_{A,1}$, $s_{B,2} < s_{B,1}$ og $s_{C,2} < s_{C,1}$. I tilfældet med tre partier stemmer det fint med, at man ikke kan lave tricket fra eksempel 44 med en linje fra et hjørne. Alle vægge i cellerne for divisormetoderne går nemlig igennem et af de tre hjørner A, B eller C.

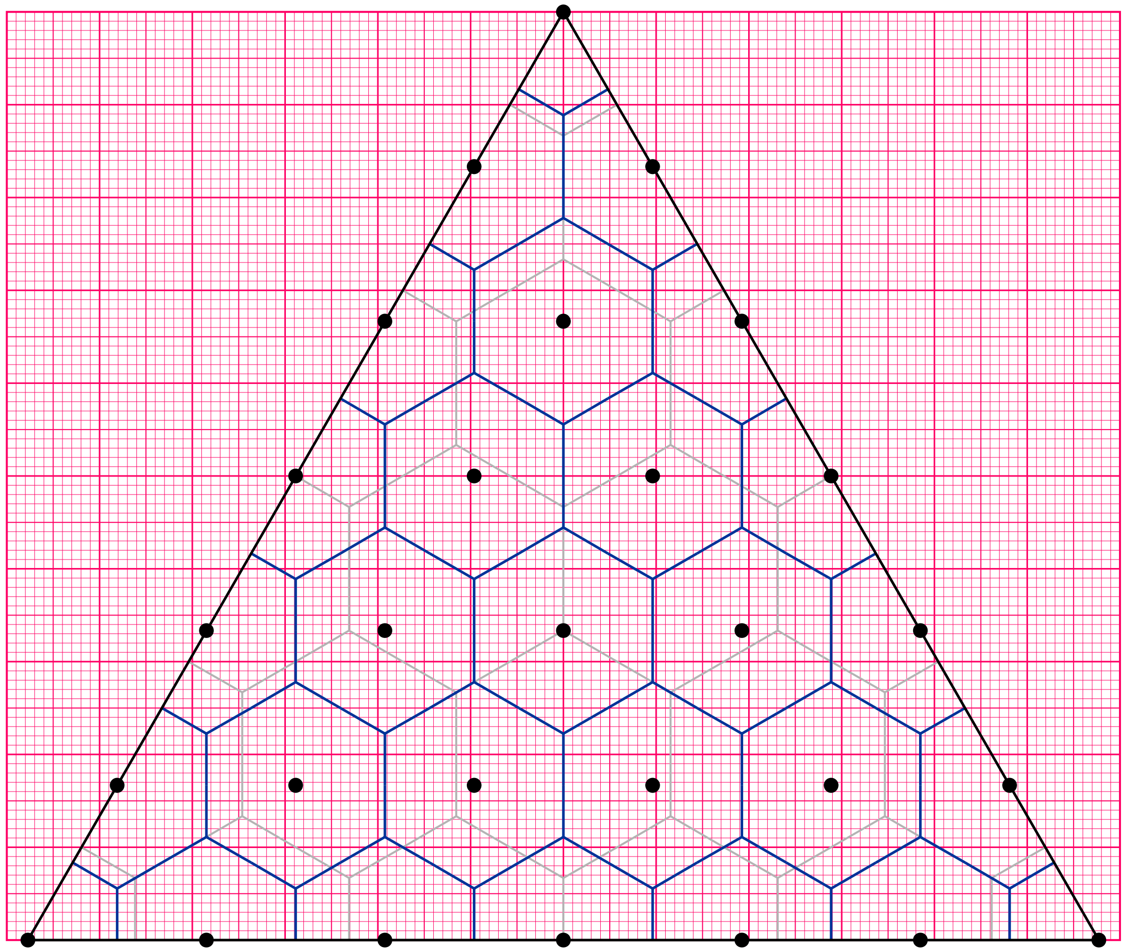
Bilag til opgave 34 (Største brøks metode)



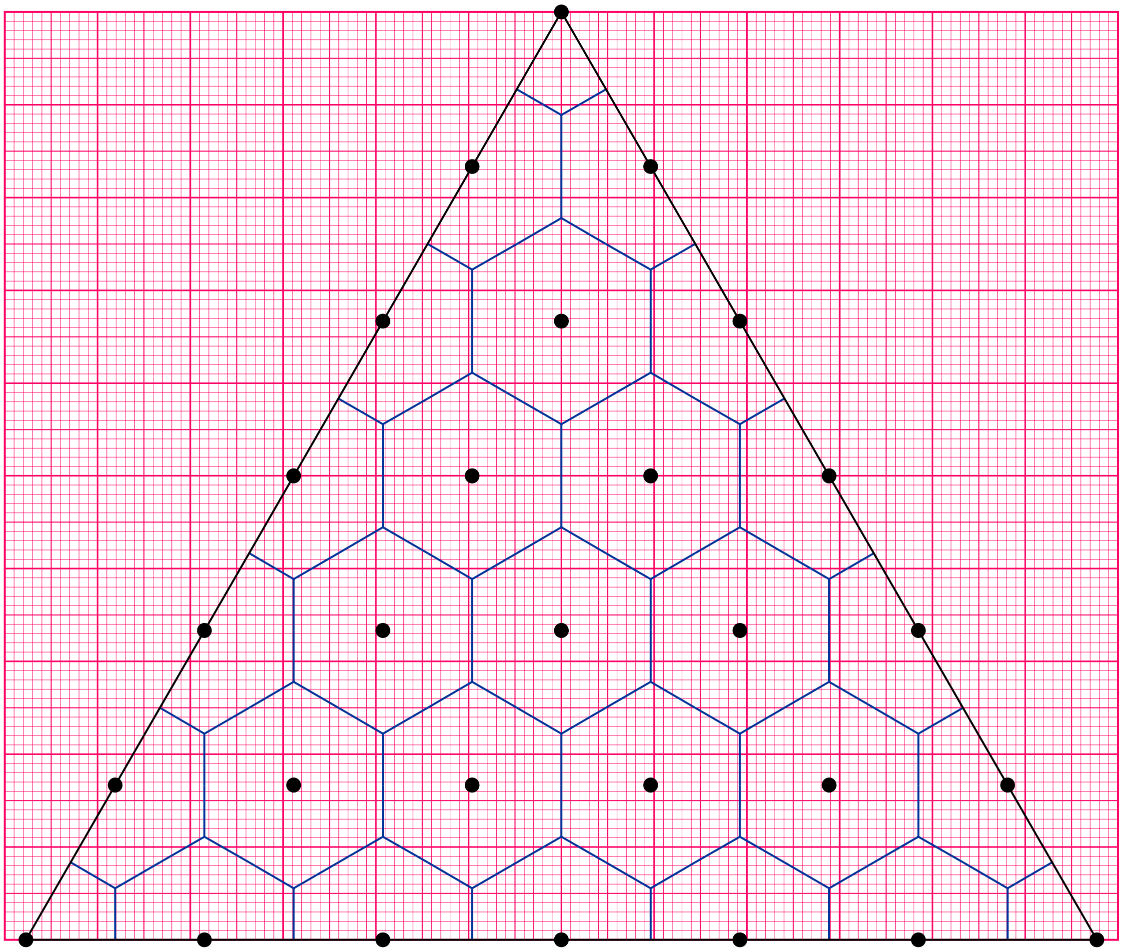
Bilag til opgave 36 (D'Hondts metode)



Bilag til opgave 39



Bilag til opgave 45 med monotoniparadokset (Største brøks metode)



Litteratur

[1] Ebbe Thue Poulsen. *Matematik og retfærdighed - Mandatfordelingsproblemet*. Aspekt serien, Gyldendal, 2000.

[2] Michael L. Balinski, H. Peyton Young. *Fair Representation – Meeting the Ideal of One Man, One Vote*. Second edition. Brookings Institution Press, 2001.

Links

[L1] https://matematiksider.dk/mandatfordelinger.html (Mandatfordelingsproblemet)

[L2] https://www.census.gov (Folketælling i USA - US Census Bureau)

[L3] https://en.wikipedia.org/wiki/United_States_House_of_Representatives
(United States House of Representatives - Wikipedia)

[L4] Why it's mathematically impossible to share fair (Glimrende YouTube video)

[L5] History of the United States House of Representatives (Wikipedia)